PHAN HUY KHẢI

TOÁN HỌC NÂNG CAO CHO HỌC SINH

HÌNH HỌC 10

SÁCH THAM KHẢO DÙNG CHO:
GIÁO VIÊN VÀ PHỤ HUYNH HỌC SINH
HỌC SINH KHÁ, GIỎI LỚP 10
HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

TV

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHAN HUY KHẢI

TOÁN NÂNG CAO CHO HỌC SINH
HÌNH HỌC 10

Sách tham khảo dùng cho :

- * Giáo viên và phụ huynh học sinh
- * Học sinh khá, giỏi lớp 10
- * Học sinh ôn thi Đại học - Cao đẳng

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc : Nguyễn Văn Thỏa
Tổng biên tập : Nghiêm Đình Vỳ

Biên tập và sửa bản in : Phạm Chí Vĩnh
Trình bày bìa: Ngọc Anh

TOÁN NÂNG CAO CHO HỌC SINH - HÌNH HỌC 10
Mã số: 01.134 .ĐH97-785-97.
In 3.000 cuốn, tại Công ty In Khoa học Kỹ thuật - Hà Nội.
Số in: 7465. Số xuất bản: 785/CXB. Số trích ngang: 390 KH/XB.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 1998.

Cuốn sách này dành để tặng cho vợ tôi
Cô giáo Sơn Hà

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn *"Toán nâng cao cho học sinh lớp 10 - Hình học"* nằm trong bộ sách *"Toán nâng cao cho học sinh"* mà tác giả đã viết từ các năm 1993, 1995, 1997. Trong cuốn sách này, các kiến thức về Hình học của chương trình lớp 10 được sắp xếp theo 7 chương sau:

Chương 1. Phương pháp toạ độ trên mặt phẳng.

Chương 2. Hệ thức lượng giác của các góc từ 0^o đến 180^o.

Chương 3. Hệ thức lượng trong các hình.

Chương 4. Phép quay.

Chương 5. Phép tịnh tiến.

Chương 6. Phép đối xứng.

Chương 7. Phép vị tự.

Trong từng chương, sau phần kiến thức cơ bản là hệ thống bài tập mẫu được phân loại dựa theo phương pháp giải chúng. Ở đây chúng tôi xin nhấn mạnh hơn các chương 1, chương 2, chương 4.

Chương 1 đề cập đến phương pháp toạ độ trên mặt phẳng, và giới thiệu với các bạn một số ứng dụng quan trọng của phương pháp toạ độ trong việc giải hàng loạt các bài toán khác của toán học sơ cấp như: chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình, giải các bài toán hình học phẳng và hình học tổ hợp.

Trong chương 2 trình bày hệ thức lượng giác của các góc từ 0^o đến 180^o. Cần lưu ý rằng các bài tập trình bày trong chương này không dùng thêm kiến thức gì khác, ngoài chương trình học sinh được học ở lớp 10 (chính vì vậy mà nó tránh được tình trạng *"sử dụng tràn lan các kiến thức ở các lớp trên"* như các công thức cộng cung, nhân cung, biến tổng thành tích - điều luôn gặp trong các sách tham khảo về hình học lớp 10 hiện nay). Tuy chỉ sử dụng các kiến thức cơ bản, nhưng những bài tập chọn lọc được trình bày trong chương này chắc chắn sẽ làm các bạn độc giả ngạc nhiên và lý thú về sự phong phú và đa dạng của chúng.

Trong chương 4, đề cập đến một trong những phép biến hình quan trọng nhất - phép quay. Các bài tập được lựa chọn ở đây sẽ cung cấp cho bạn đọc một số lượng lớn bài tập, trong đó có nhiều bài toán nổi tiếng như bài toán Napoleon, bài toán về điểm Toriselli...

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách "***Toán nâng cao cho lớp 10 - Hình học***" sẽ đáp ứng được một số lượng lớn độc giả.

Tuy nhiên trong quá trình biên soạn, cuốn sách không thể tránh khỏi các khiếm khuyết. Chúng tôi rất vui lòng chờ mong những nhận xét và góp ý của các bạn độc giả để cuốn sách được tốt hơn nữa trong những lần tái bản tiếp theo.

Hà Nội 10-1997

Tác giả

Chương I

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRÊN MẶT PHẲNG

§ 1. VÉC TƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VỀ VÉC TƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

+ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

+ *Phép cộng:*

. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$

. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$

. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

. Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

. Quy tắc trung điểm: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (I là trung điểm của AB)

+ *Phép trừ:*

. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$

. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

+ *Phép nhân véc tơ với một số thực $p \neq 0$*

$$. \ p\vec{a} \text{ là một véc tơ: } \begin{cases} \text{- Cùng phương với } \vec{a} \\ \text{- Cùng chiều với } \vec{a} \text{ nếu } p > 0 \\ \text{- Ngược chiều với } \vec{a} \text{ nếu } p < 0 \\ \text{- } |p\vec{a}| = |p|\,|\vec{a}| \end{cases}$$

$$. \ k\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ \vec{a} = 0 \end{array}\right.$$

. Tính chất: $1.\vec{a} = \vec{a}$

$p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a}$

$p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$

$(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$

. Phân tích véctơ $\vec{a}$ theo hai véctơ $\vec{b}, \vec{c}$ nghĩa là tìm được p,q sao choo:

$$\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{c}.$$

. Nếu $\vec{a} \neq 0$ thì: $\vec{b} \,//\, \vec{a} \Leftrightarrow \exists m \in R: \vec{b} = m\vec{a}$ (m duy nhất).

. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương thì từ : $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$

suy ra: $m = n = 0$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ.

Ví dụ 1. Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCA_1, ABC_1 và ACB_1. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = 0$$

IA = IC + CA
= ½BC + CA .
= ½(BA + AC) + CA
= ½BA + ½AC − AC

$GA = \frac{2}{3} IA$
$\overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

BÀI GIẢI

Bổ đề *: Cho tam giác ABC, và G là trọng tâm của nó. Khi đó ta có.*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$$

~~AB + BG + GB + CA + AG~~ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} = 0$

(Bổ đề chứng minh dễ dàng, nên dành cho các bạn độc giả)

Áp dụng bổ đề vào tam giác BCA_1 với trọng tâm G_1, ta có :

$$\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1A_1} = 0$$

hay: $\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{GA_1} = 0$

$\Rightarrow$ $3\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{GA_1} = 0$

$\Rightarrow$ $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA_1}$ (1)

Lý luận tương tự, có :

$$3\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC_1} \quad (2)$$

$$3\overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB_1} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) có :

$$3(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3}) = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1}) \quad (4)$$

Do G đồng thời là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$, nên suy ra :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = 0$$

Do đó từ (4) suy ra : $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = 0$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, gọi O, G, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác và I là tâm đường tròn đi qua các trung điểm của ba cạnh. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

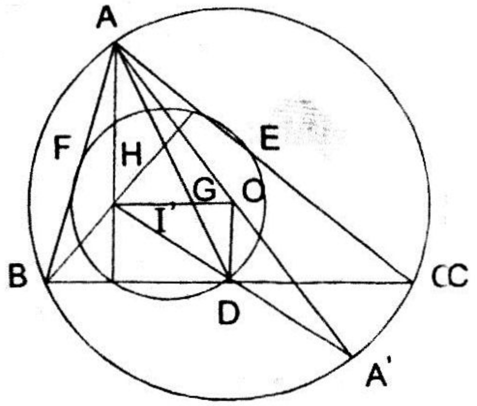
b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$ với M là một điểm bất kỳ.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

d) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{HG}$

e) $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OI}$

BÀI GIẢI



a) Gọi D, E, F lần lượt là các trung điểm của BC, CA, AB. Áp dụng quy tắc trung điểm ta có:

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GD}$. Mặt khác:

$\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ hay $2\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA}$

Vậy : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$

$= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{O} = 3\overrightarrow{MG}$

c) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua O. Dễ thấy BHCA' là hình bình hành nên H, D, A' thẳng hàng. Ta có : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$, mặt khác OD là đường trung bình của ΔHAA' nên $\overrightarrow{OD} = 1/2\,\overrightarrow{AH}$, suy ra :

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AH}$. Ta lại có : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$, từ đó suy ra:

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$ hay $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Áp dụng a) với M ≡ O ta có ngay: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

Vậy $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, từ đây suy ra H, O, G thẳng hàng.

d) Cho M ≡ H, theo a) ta có : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} = 3(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OG})$

$$= 3\overrightarrow{HO} + 3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{HO} - \overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{HO}$$

e) Chú ý rằng: O là trực tâm ΔDEF

I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ DEF

G là trọng tâm Δ DEF

Áp dụng d) có: $\overrightarrow{IO} = 3\overrightarrow{IG} = 3\overrightarrow{IO} + 3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OH}$

hay $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{IO} - 3\overrightarrow{IO} = -2\overrightarrow{IO} = 2\overrightarrow{OI}$

Từ đây suy ra O, H, I thẳng hàng và theo c) ta có bốn điểm O, G, H, I thẳng hàng.

Chú ý: *Như vậy ta rút ra kết luận: "Trong mọi tam giác, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm thẳng hàng. Đường thẳng nối ba điểm ấy, gọi là **đường thẳng Euler**".*

Ví dụ 3. Cho đa giác đều n cạnh $A_1, A_2, ..., A_n$ tâm là O $(n \geq 3)$

Chứng minh: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + ... + \overrightarrow{OA_n} = O$

BÀI GIẢI

1) Với n chẵn: n = 2k thì đỉnh A_i nào đó (i = 1, 2, ... k) sẽ đối xứng với đỉnh A_{i+k} qua O. Do vậy $\overrightarrow{OA_i} = -\overrightarrow{OA_{i+k}}$

suy ra $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_{2k}} = \overrightarrow{O}$

2) Với n lẻ: n = 2k - 1 thì đỉnh A_2 và A_{2k-1}, A_3 và A_{2k-2} ... sẽ đối xứng qua đường thẳng OA_1. Vì vậy các véc tơ tổng: $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_{2k-1}}$, $\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_{2k-2}}$ ... cùng phương với $\overrightarrow{OA_1}$. Ta có:

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_{2k-1}};\ \overrightarrow{AO_3} + \overrightarrow{OA_{2k-2}};\ ... \text{ cùng phương với } \overrightarrow{OA_1}.$$

Ta có: $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_{2k-1}} = \overrightarrow{\alpha_2 OA_1}$

$$\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_{2k-2}} = \alpha_3\overrightarrow{OA_1}$$

$$\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_{k+1}} = \alpha_k\,\overrightarrow{OA_1}$$

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2k-1}} = \overrightarrow{OA_1} + (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_{2k-1}}) + \ldots +$$
$$(\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \overrightarrow{OA_1} + (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k)\,\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA_1}.$$

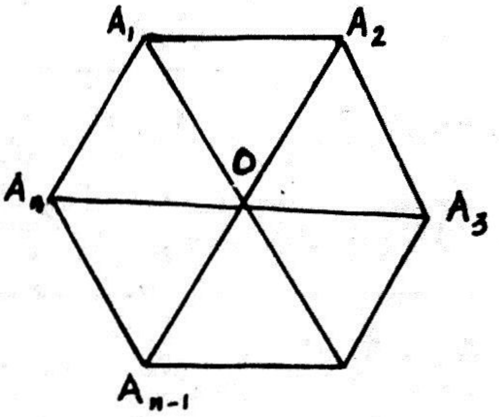
Lập luận tương tự như trên với trục đối xứng là OA_2 ta có $\overrightarrow{S} = \beta\overrightarrow{OA_2}$. Như vậy $\alpha\overrightarrow{OA_1} = \beta\overrightarrow{OA_2}$, vì $\overrightarrow{OA_1}$ và $\overrightarrow{OA_2}$ không cùng phương nên:

$$\alpha = \beta = 0 \qquad \Rightarrow \quad \overrightarrow{S} = 0$$

(Véctơ $\overrightarrow{S}$ cùng phương với hai véc tơ không cùng phương nên $\overrightarrow{S} = 0$)

Chú ý: *Ta còn có cách giải khác như sau:*

Xoay đa giác đều quanh tâm O, góc quay bằng $\frac{2}{n}\pi$, *dễ thấy chẳng hạn nếu chiều quay theo chiều thuận kim đồng hồ, thì:*



$A_1 \to A_2$

$A_2 \to A_3$

$A_3 \to A_4$

....

$A_{n-1} \to A_n$

$A_n \to A_1$.

Đặt $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$

Gọi $\overrightarrow{v'}$ là véc tơ thu được sau phép quay, ta có:

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{v}$$

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'}$ mà góc giữa $\overrightarrow{v}$ và $\overrightarrow{v'}$ là $\frac{2}{n}\pi \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'} = 0$

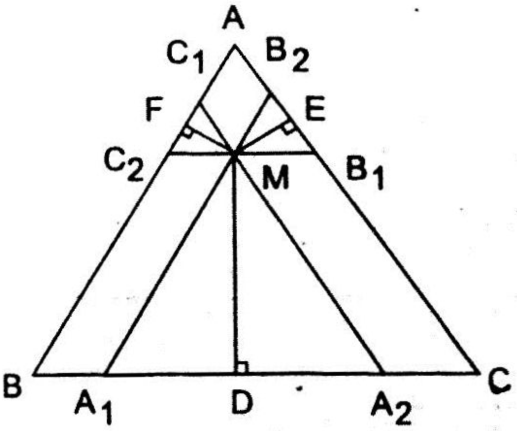
$\Rightarrow \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = 0 \Rightarrow$ đ. p. c. m..

Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC tâm O. Gọi M là một điểm tuỳ ý bên trong tam giác ABC. Hạ MD, ME, MF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

BÀI GIẢI

Qua M dựng các đoạn A_1B_2 // AB; B_1C_2 // BC và C_1A_2 // CA (Xem hình vẽ). Vì ABC là tam giác đều, nên các tam giác MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2 cũng là các tam giác đều ⇒ D, E, F tương ứng là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.



Vì thế ta có:

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2})$$

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2})$$

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2})+(\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}) + (\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MB_2}) \quad (1)$$

Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MA}$$

Thay vào (1) có: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$ (2)

Áp dụng bổ đề sau: Trong mọi tam giác ABC với G là trọng tâm, thì với mọi điểm M trên mặt phẳng, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \qquad (3)$$

(Bổ đề này là hiển nhiên, và thường xuyên sử dụng), khi đó chú ý rằng ở đây $G \equiv O$, nên từ (2) và (3) suy ra:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} \Rightarrow \text{đ. p. c. m..}$$

Ví dụ 5. *(Bài toán về tâm tỉ cự của bộ hai điểm A, B)*

Cho hai điểm A, B và hai số thực α, β sao cho : $\alpha + \beta \neq 0$.

1) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I sao cho:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = 0$$

2) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta luôn có:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{MI}$$

BÀI GIẢI

1) $$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha\overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} = 0 \end{aligned}$$

Do $\alpha + \beta \neq 0$, nên suy ra:

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{AI} = \beta.\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\,\overrightarrow{AB} \qquad (1) \end{aligned}$$

Vế phải của (1) là véc tơ xác định, nên từ (1) suy ra tồn tại và duy nhất điểm I thoả mãn (1), tức là thoả mãn yêu cầu đề ra.

2) Ta có với mọi điểm M, thì:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} + \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB}$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} \quad \Rightarrow \text{ đ. p. c. m..}$$

Chú ý: *1) Điểm I xác định duy nhất từ hệ thức :*

$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = 0$, *với* $\alpha + \beta \neq 0$ *được gọi là tâm tỉ cự của hai điểm A, B với bộ số* (α, β).

Khái niệm về tâm tỉ cự là mở rộng các khái niệm thông thường. Thật vậy :

- Nếu $\alpha = \beta \neq 0$ *(chẳng hạn* $\alpha = \beta = 1$*), thì*

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$$

$$\Leftrightarrow \quad I \text{ là trung điểm của } AB.$$

- Nếu $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, *thì:*

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad I \equiv A$$

Vậy khái niệm tâm tỉ cự là mở rộng của khái niệm trung điểm, đầu mút của đoạn thẳng. Dĩ nhiên bằng cách chọn α, β thích hợp, nó còn cho ta nhiều khái niệm khác nữa.

2/ Khi $\alpha = \beta \neq 0$, *thì công thức :*

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Vì thế công thức này là sự mở rộng của công thức quen biết:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, *với I là trung điểm của AB.*

Ví dụ 6. *(Bài toán về tâm tỉ cự của bộ ba điểm A, B, C)*

Cho ba điểm A, B, C và ba số thực α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$)

1/ Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I sao cho :

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = 0$$

2/ Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MI}$$

BÀI GIẢI

Ta có: $\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma\,(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AI} = \frac{\beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC}}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad (1)$$

(do $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$)

Vế phải của (1) là véc tơ hoàn toàn xác định, nên từ (1) suy ra tồn tại và duy nhất điểm I thoả mãn (1), tức là thoả mãn hệ thức.

$$\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC} = 0 \qquad \Rightarrow \text{đ. p. c. m..}$$

2/ Chứng minh như phần 2) ví dụ 5.

Chú ý: *1/ Điểm **I** xác định duy nhất từ hệ thức:*

$\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC} = 0$, với $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ gọi là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C với bộ số (α, β, γ). Khái niệm này là mở rộng các khái niệm thông thường. Thật vậy thí dụ như:

- Nếu A, B, C không thẳng hàng và lấy $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, thì:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 0.$$

$\Leftrightarrow I \equiv G$, *ở đây G là trọng tâm của tam giác ABC.*

- *Nếu* $\beta = \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, *thì:*

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = 0 \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Leftrightarrow I \equiv A$$

- *Nếu* $\alpha = \beta \neq 0,\ \gamma = 0$, *thì*

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$$

$\Leftrightarrow$ *I là trung điểm của AB.*

2/ Khi A, B, C không thẳng hàng, và $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, *thì từ phần 2 của ví dụ 6 ta suy ra công thức quen biết : Trọng mọi tam giác ABC có hệ thức sau:*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}\text{, với mọi vị trí của điểm M.}$$

3/ Để giải phần 1 của ví dụ 6 ta còn có cách giải khác bằng việc áp dụng ví dụ 5.

Cách 2 cho phần 1.

Do $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Rightarrow$ trong ba số $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha$ có ít nhất một số $\neq 0$, giả sử $\alpha + \beta \neq 0$ (nếu không lý luận hoàn toàn tương tự)

Do $\alpha + \beta \neq 0$, vậy theo ví dụ 5 tồn tại duy nhất điểm K sao cho:

$$\alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} = 0\ (*)$$

Áp dụng ví dụ 5 cho hai điểm K, C và bộ số $\alpha + \beta$, γ, thì tồn tại duy nhất điểm I sao cho: $(\alpha + \beta)\overrightarrow{IK} + \gamma\overrightarrow{IC} = 0\ (**)$

Mặt khác lại theo ví dụ 5 (phần 2) ta có:

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{IK} = \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB}\ (***)$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
V-Do/6376

Từ (**) và (***) suy ra : $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = 0$

Đó là đ. p. c. m..

Nhận xét: Cách giải này có thể phức tạp hơn cách giải ở trên, nhưng nó lại cho phép ta *dùng phép quy nạp* để xây dựng khái niệm tâm vị tự cho hệ n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ với bộ số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0)$$

Định nghĩa: Cho hệ n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số thực $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm I sao cho:

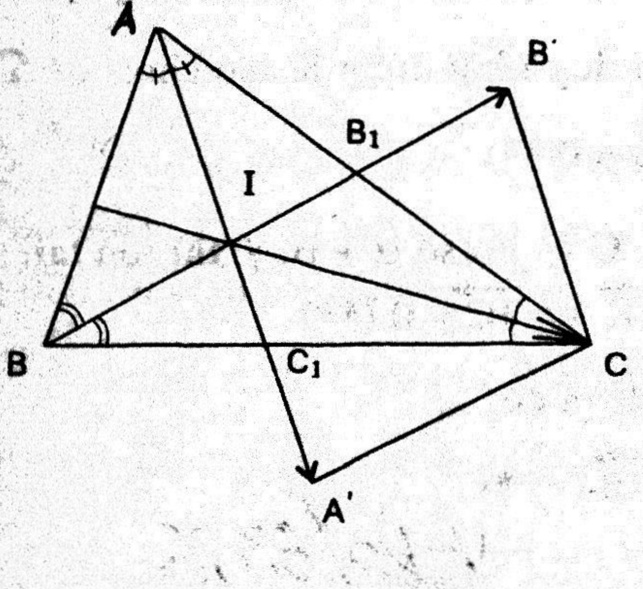
$$\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = 0$$

Điểm I gọi là tâm tỉ cự của hệ n điểm nói trên với bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Cách giải hai nói trên cho phép ta dùng phương pháp quy nạp để xây dựng tâm tỉ cự cho hệ n điểm, từ tâm tỉ cự của hệ n-1 điểm. Ưu thế của cách 2 là ở chỗ đó.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có ba cạnh là BC = a, AC = b, AB = c. Chứng minh đường tròn nội tiếp I là tâm tỉ cự của ba đỉnh A, B, C theo bộ số (a, b, c).

BÀI GIẢI



Vẽ hình bình hành IB'CA', ta có:

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} \qquad (1)$$

Theo định lí Ta let, ta có:

$$\frac{A'C}{IB} = \frac{CC_1}{BC_1} \text{ hay}$$

$$\frac{IB'}{IB} = \frac{CC_1}{BC_1} \qquad (2)$$

Theo định lí đường phân giác trong, có:

$$\frac{CC_1}{BC_2} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Thay vào (2) có: $IB' = \frac{b}{c} IB$ (3)

Từ (3) suy ra (do IB' và IB là hai tia đối nhau) $\overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}$ (4)

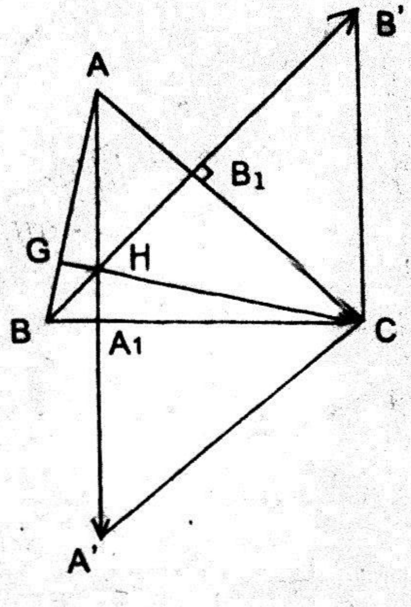
Lý luận tương tự, có: $\overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$ (5)

Thay (4), (5) vào (1) có: $\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB}$

hay $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0.$ (6)

Rõ là $a + b + c \neq 0$, nên từ (6) suy ra I là tâm tỉ cự của A, B, C theo bộ số (a, b, c). Đó là đ. p. c. m..

Chú ý: *Hoàn toàn tương tự, ta có thể giải bài toán sau: Cho ABC là tam giác không vuông, khi đó trực tâm H là tỉ cự của ba đỉnh A, B, C theo bộ số (tgA, tgB, tgC). Ta chỉ cần xét khi ABC là tam giác nhọn (nếu là tam giác tù lý luận hoàn toàn tương tự).*



Vẽ hình bình hành HB'CA', ta có:

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HA'} \qquad (7)$$

Tương tự như trên ta có:

$$\frac{HB'}{HB} = \frac{CA_1}{BA_1}$$

Ta có $CA_1 = AA_1 \cot g C$

$BA_1 = AA_1 \cot g B$

$$\Rightarrow \qquad \frac{HB'}{HB} = \frac{\text{cotg}C}{\text{cotg}B} = \frac{\text{tg}B}{\text{tg}C}$$

$$\Rightarrow \qquad HB' = -\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C} HB \qquad (8)$$

Tương tự $HA' = -\dfrac{\text{tg}A}{\text{tg}C} HA \qquad (9)$

Từ (7) (8) (9) suy ra đ. p. c. m..

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các đường thẳng song song đi qua A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt tại các điểm thứ hai A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng các trực tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1 nằm trên một đường thẳng.

BÀI GIẢI

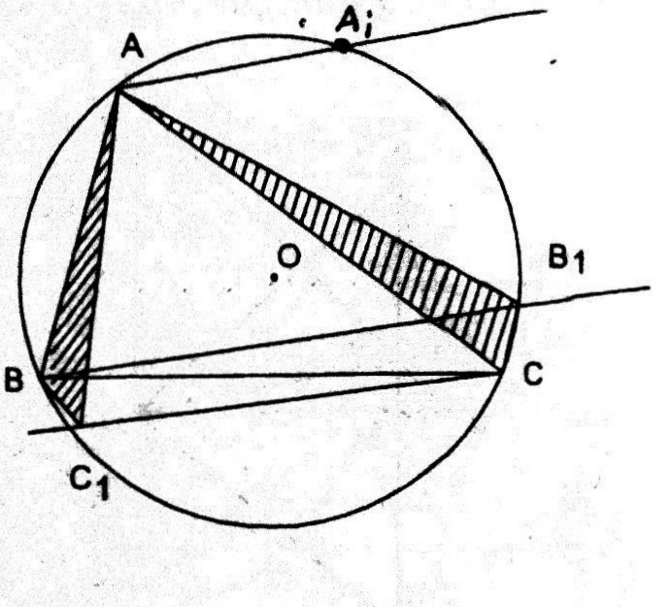
Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1. Chú ý rằng ba tam giác này đều chung đường tròn ngoại tiếp với tam giác ABC.

Theo ví dụ 2, ta có:

$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} \qquad (3)$$



Từ (1) (2) suy ra:

$$\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{H_2H_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{CC_1} \qquad (4)$$

Tương tự có: $\overrightarrow{H_2H_3} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{A_1A} \quad (5)$

Do $AA_1 // BB_1 // CC_1$ nên $\overrightarrow{BB_1} = \alpha\, \overrightarrow{A_1A}$; $\overrightarrow{CC_1} = \beta\, \overrightarrow{A_1A}$

Vậy từ (4) (5) suy ra $\overrightarrow{H_2H_1} = (\beta + 1)\, \overrightarrow{A_1A}$ (6)

$\overrightarrow{H_2H_3} = (\alpha + 1)\, \overrightarrow{A_1A}$ (7)

Từ (6) (7) suy ra : $H_2H_1 // H_2H_3 \Rightarrow H_1, H_2, H_3$ thẳng hàng.

⇒ đ. p. c. m..

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh BC ở D. Gọi J và K tương ứng là trung điểm của BC và AD. Chứng minh ba điểm I, K, J thẳng hàng.

BÀI GIẢI

Theo tính chất của các tiếp tuyến phát xuất từ một điểm, ta có:

BD = p - b; DC = p - c, ở đây p là nửa chu vi.

Từ đó suy ra: $(p - c)\, \overrightarrow{DB} + (p - b)\, \overrightarrow{DC} = 0$

hay: $(p - c)\, (\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{BI}) + (p - b)\, (\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{CI}) = 0$

$\Rightarrow$ $(p - c)\, \overrightarrow{IB} + (p - b)\, \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{ID}\, (p - c + p - b)$

hay: $a\, \overrightarrow{ID} = (p - c)\, \overrightarrow{IB} + (p - b)\, \overrightarrow{IC}$ (1)

Do K, J tương ứng là trung điểm của AD và BC, nên ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = 2\, \overrightarrow{IK}$ hay:

$a\, \overrightarrow{IA} + a\overrightarrow{ID} = 2a.\, \overrightarrow{IK}$ (2)

Thay (1) vào (2) có: $2a\, \overrightarrow{IK} = a\overrightarrow{IA} + (p - c)\, \overrightarrow{IB} + (p - b)\, \overrightarrow{IC}$ (3)

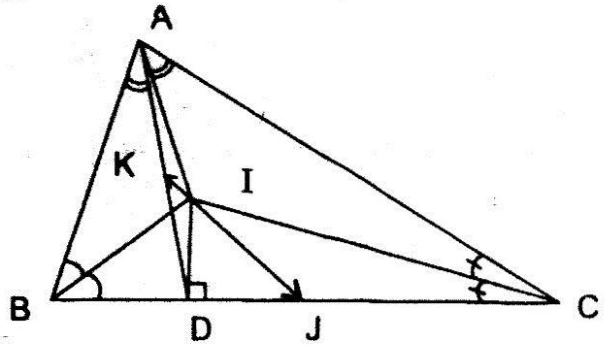
Lại có : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ}$ hay $(p - a)\overrightarrow{IB} + (p - a)\, \overrightarrow{IC} = 2(p - a)\, \overrightarrow{IJ}$ (4)

Từ (3) (4) suy ra:

$2a\, \overrightarrow{IK} + 2\, (p - a)\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}$ (5)

Theo ví dụ 7, do I là tâm tỉ cự của A, B, C theo bộ số (a, b, c) nên $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$, vậy từ (5) suy ra :

$$a\overrightarrow{IK} + (p - a)\overrightarrow{IJ} = 0 \quad (6)$$

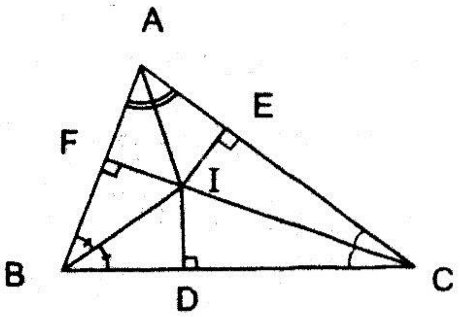


Đẳng thức (6) chứng tỏ rằng, hai véc tơ IK và IJ cộng tuyến với nhau, tức là I, J, K thẳng hàng ⇒ đ. p. c. m..

Chú ý : *Từ bài tập trên ta suy ra kết quả sau:*

Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b, AB = c. Đường tròn nội tiếp tam giác tâm I lần lượt tiếp xúc với ba cạnh BC, AC, AB tại D, E, F. Chứng minh: $a.\overrightarrow{AD} + b.\overrightarrow{BE} + c.\overrightarrow{CF} = 0$

Thật vậy theo (1) ta có:



$$a\overrightarrow{ID} = (p - c)\overrightarrow{IB} + (p - b)\overrightarrow{IC} \quad (7)$$

Lý luận tương tự, có:

$$b\overrightarrow{IE} = (p - a)\overrightarrow{IC} + (p - c)\overrightarrow{IA} \quad (8)$$

$$c\overrightarrow{IF} = (p - b)\overrightarrow{IA} + (p - a)\overrightarrow{IB} \quad (9)$$

Cộng từng vế (7) (8) (9) có: $a.\overrightarrow{ID} + b.\overrightarrow{IE} + c.\overrightarrow{IF} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}$

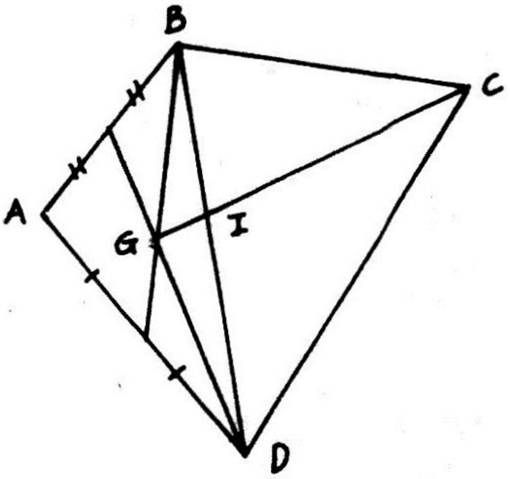
hay $a(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA}) + b(\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{IB}) + c(\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{IC}) = 0$

$\Rightarrow$ $a.\overrightarrow{AD} + b.\overrightarrow{BE} + c.\overrightarrow{CF} = 0 \Rightarrow$ *đ. p. c. m..*

Ví dụ 10. Cho tứ giác ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là điểm trên GC sao cho IC = 3IG. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có hệ thức:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$$

BÀI GIẢI



Vì G là trọng tâm tam giác ABC, nên G là tâm tỉ cự của A, B, C theo bộ số (1,1,1)

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG} \qquad (1)$$

Từ giả thuyết suy ra

$$3\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{IC} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 0$

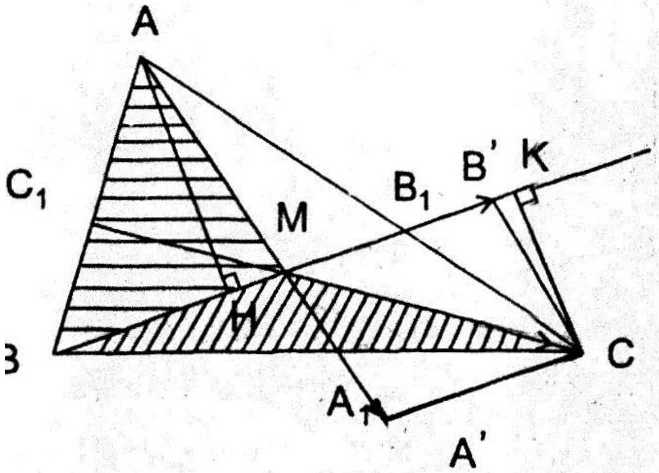
Vậy I là tâm tỉ cự của 4 điểm A, B, C, D theo bộ số (1,1,1,1).

Theo tính chất của tâm tỉ cự, ta có mọi điểm M:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI} \Rightarrow \text{đ. p. c. m..}$$

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC, M là một điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng M là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo bộ số (S_a, S_b, S_c), ở đây $S_a = S_{MBC}$; $S_b = S_{MAC}$; $S_c = S_{MAB}$.

BÀI GIẢI



Giả sử AM, BM, CM kéo dài cắt BC, AC, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1.

Dựng hình bình hành MB'CA', ta có:

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA'} \qquad (1)$$

Kẻ AH và CK ⊥ BM.

Ta có theo định lý Talet:

$$\frac{B'C}{MA} = \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CK}{AH} \qquad (2)$$

Do $\dfrac{B'C}{MA} = \dfrac{MA'}{MA}$, còn $\dfrac{CK}{AH} = \dfrac{S_{MBC}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_a}{S_c}$

Vậy từ (2) suy ra: $MA' = \dfrac{S_a}{S_c} MA$ hay $\overrightarrow{MA'} = -\dfrac{S_a}{S_c}\overrightarrow{MA}$ (3)

Lý luận tương tự, có: $\overrightarrow{MB'} = -\dfrac{S_b}{S_c}\overrightarrow{MB}$ (4)

Thay (3) (4) vào (1) có $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = 0$,

tức là M là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo bộ số (S_a, S_b, S_c).

Đó là đ. p. c. m..

Chú ý: *1. Qua ví dụ 11 ta thấy rằng khái niệm "tâm tỉ cự" rất đa dạng. Kết quả của bài 11 cho ta một sự kiện khá ngạc nhiên là : Mọi điểm bên trong tam giác đều có thể xem như là tâm tỉ cự của ba đỉnh A, B, C theo một bộ số thích hợp.*

2. Dĩ nhiên từ ví dụ 11 cho ta lại nhiều kết quả quen biết.

- Nếu M ≡ G, ở đây G là trọng tâm tam giác, thì do $S_a = S_b = S_c = \dfrac{S}{3}$,

Vậy G là tâm tỉ cự của 3 đỉnh A, B, C theo bộ số (1,1,1).

- Nếu M ≡ I, ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp, thì do :

$$S_a = \frac{1}{2}ar;\ S_b = \frac{1}{2}br;\ S_c = \frac{1}{2}cr$$

⇒ *I là tâm tỉ cự của 3 đỉnh A, B, C theo bộ số (a, b, c).*

- Nếu ABC là tam giác đều. Mọi điểm M trong tam giác đều là tâm tỉ cự của 3 đỉnh A, B, C theo bộ số (x, y, z) ở đây x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M xuống BC, AC, AB.

(do $S_a = \frac{1}{2}ax$; $S_b = \frac{1}{2}ay$; $S_c = \frac{1}{2}az$, vì ở đây $a = b = c$).

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC.

1/ Dựng điểm I là tâm tỉ cự của A, B, C theo bộ số (3, -2, 1).

2/ Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm M, N xác định bởi hệ thức:

$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

3/ Tìm quỹ tích điểm M sao cho:

$$|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$$

4/ Tìm quỹ tích điểm M sao cho:

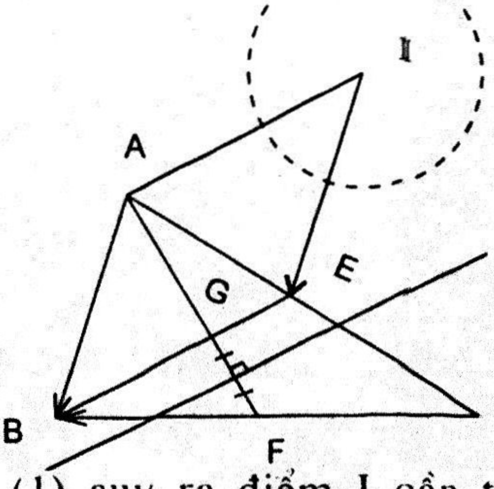
$$2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$$

5/ Tìm quỹ tích điểm M sao cho:

$$|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

BÀI GIẢI

1/ Điểm I cần tìm phải thoả mãn hệ thức véc tơ sau:



$$3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{IE} = 0$$

(ở đây E là trung điểm của AC)

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra điểm I cần tìm là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABEI, trong đó E là trung điểm của AC.

2/ Theo tính chất của tâm tỉ cự, ta có:

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3 - 2 + 1)\overrightarrow{MI} = 2\,\overrightarrow{MI}$$

Vậy $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{MI}$

⇒ M, N, I thẳng hàng ⇒ mọi đường thẳng nối M, N luôn đi qua điểm cố định I.

3/ Theo tính chất của tâm tỉ cự ta có:

$$|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$$

$$\Leftrightarrow \quad 2|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}|$$

$$\Leftrightarrow \quad MI = \frac{AB}{2} = \text{const}$$

Vậy quỹ tích M là đường tròn tâm I bán kính $R = \dfrac{AB}{2}$

4/ Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$, G là trọng tâm tam giác;

còn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF}$, F là trung điểm BC.

Vì thế $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$

$$\Leftrightarrow \quad 6|\overrightarrow{MG}| = 6|\overrightarrow{MF}|$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MF}$$

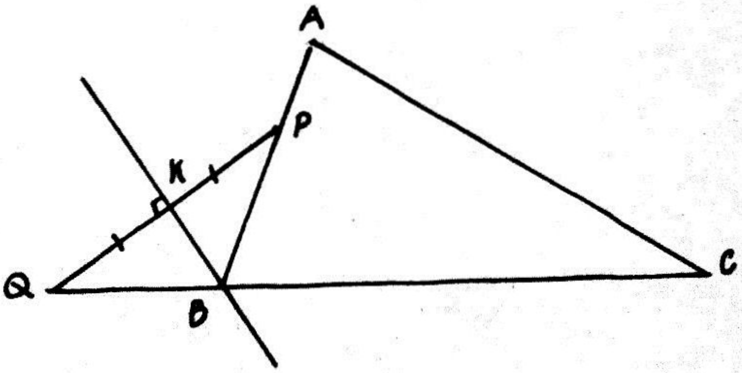
Vậy quỹ tích của M là trung trực của đoạn GF, với G là trọng tâm của Δ ABC, còn F là trung điểm của BC.

5/ Gọi P là tâm tỉ cự của A, B theo tỷ số (2, 1)

Từ $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PK} = 0$, ở đây K là trung điểm của AB. Vậy ta có P, A, K thẳng hàng, và P được xác định như hình vẽ bên

(P nằm trên AB sao cho $AP = \dfrac{1}{3}AB$)

Gọi Q là tâm tỉ cự của B, C theo bộ số (4, -1)



Từ $4\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} = 0$

$\Leftrightarrow$ $3\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} = 0$

$\Leftrightarrow$ $3\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{CB} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{QB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Bây giờ theo tính chất của tâm tỉ cự, ta có:

$$|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

$$\Leftrightarrow \quad 3|\overrightarrow{MP}| = 3|\overrightarrow{MQ}| \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$$

Vậy quỹ tích của M là trung trực của PQ.

Ví dụ 13. Cho góc $\widehat{xOy}$. Trên Ox lần lượt lấy các điểm A_1, A_2, A_3 sao cho $OA_1 : A_1A_2 : A_2A_3 = 1 : 2 : 3$. Trên Oy lấy A'_1, A'_2, A'3 sao cho $OA'_1 : A'_1A'_2 : A'_2A'_3 = 3 : 3 : 2$.

Chứng minh ba đường thẳng A'_1A_1, A'_2A_2, A'_3A_3 đồng quy.

BÀI GIẢI

Vì $\dfrac{OA_1}{A_1A_2} \neq \dfrac{OA'_1}{A'_1A'_2} \Rightarrow A_1A'_1$ cắt $A_2A'_2$

tại S. Do các điểm A_1, A'_1, S; A_2, A'_2, S thẳng hàng nên dễ thấy:

$$\overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{OA_1} + (1 - x)\overrightarrow{OA'_1}$$

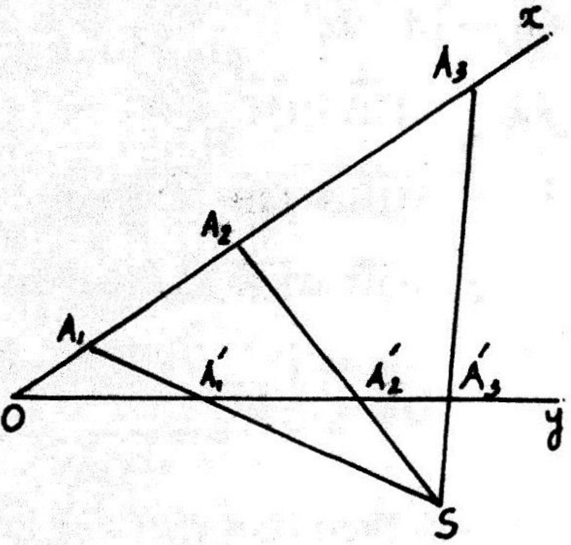
$$\overrightarrow{OS} = y\overrightarrow{OA_2} + (1 - y)\overrightarrow{OA'_2}$$

$$\Rightarrow \quad x\overrightarrow{OA_1} + (1 - x)\overrightarrow{OA'_1} = y\overrightarrow{OA_2} + (1 - y)\overrightarrow{OA'_2} \quad (1)$$

Đặt $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OA'_3} = \vec{b}$ thì theo giả thiết có:

$$\overrightarrow{OA}_1 = \frac{1}{6}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OA}'_1 = \frac{3}{8}\vec{b} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OA}_2 = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OA}'_2 = \frac{3}{4}\vec{b}$$



Thay vào (1) ta được:

$$\frac{x}{6}\vec{a} + \frac{3}{8}(1 - x)\vec{b} = \frac{y}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}(1 - y)\vec{b}$$

Vì khai triển của véc tơ $\overrightarrow{OS}$ theo các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ là duy nhất nên ta nhận được hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{3}{8}(1 - x) = \dfrac{3}{4}(1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Do đó : $\overrightarrow{OS} = -3\overrightarrow{OA}_1 + 4\overrightarrow{OA}'_1$ và kết hợp với (2) suy ra:

$$\overrightarrow{OS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}'_3 + \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}'_3 \qquad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}'_3 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}'_3 - \overrightarrow{OA}_3)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'_3S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A'_3} \Leftrightarrow A'_3, A_3, S \text{ thẳng hàng.}$$

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC

1/ Dựng I sao cho nó là tâm tỉ cự của A, B, C với bộ số (1, 3, -2)

Dựng D sao cho nó là tâm tỉ cự của B, C theo bộ số (3, -2).

2/ Chứng minh A, I, D thẳng hàng.

3/ Gọi E là trung điểm của AB, N là một điểm sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.

Tìm k sao cho ba đường thẳng AD, EN, BC đồng quy.

4/ Tìm quỹ tích M sao cho

$$|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

BÀI GIẢI

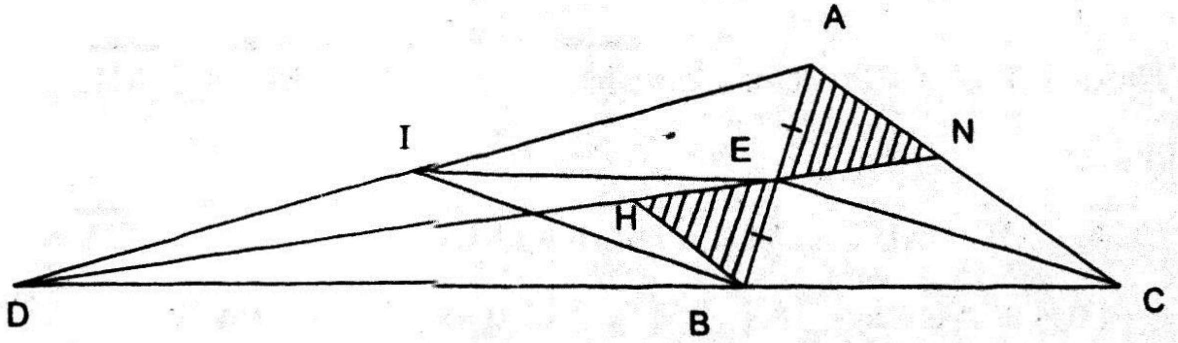
1/ Gọi I là tâm tỉ cự của A, B, C với bộ số (1, 3, -2), ta có:

$$\overrightarrow{IA} + 3\,\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{IE} + 2\overrightarrow{CB} = 0$ (E là trung điểm của AB)

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BC}.$$



Vậy I là đỉnh thứ tư của hình bình hành BCEI.

Gọi D là tâm tỉ cự của B, C theo bộ số (3, -2), ta có:

$$3\,\overrightarrow{DB} - 2\,\overrightarrow{DC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{DB} + 2\,(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{DB} + 2\,\overrightarrow{CB} = 0$$

$\Rightarrow$ D, B, C thẳng hàng (D, C ở hai phía của B và DB = 2BC)

2/ Do BC = IE và DB = 2BC ⇒ DB = 2IE mà AE = EB

⇒ A, I, D thẳng hàng ⇒ đ. p. c. m..

Chú ý: *Để chứng minh A, I, D thẳng hàng, ta có thể làm như sau:*

Ta có : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Từ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ *suy ra A, I, D thẳng hàng ⇒ đ. p. c. m..*

3/ Do AD ∩ BC = D, và giả sử DE ∩ AC = N ⇒ N ∈ AC vậy k > 0

Kẻ BH // AC ⇒ BH = AN (Vì EA = EB). Theo định lý Talet có:

$$\frac{BH}{CN} = \frac{DB}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}CN$$

$$\Rightarrow \quad AN = \frac{2}{3}NC = \frac{2}{5}AC \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

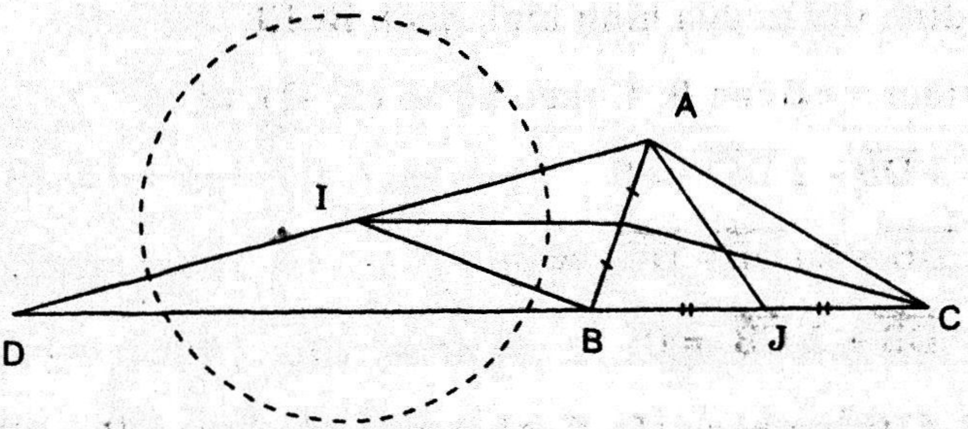
Vậy $k = \frac{2}{5}$

4/ Theo tính chất tâm tỉ cự có : $\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - 2\,\overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MI}$

Mặt khác:

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} =$

$= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AJ}$ (ở đây J là trung điểm của BC)



Do vậy $$|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2|\overrightarrow{MI}| = 2|\overrightarrow{AJ}|$$

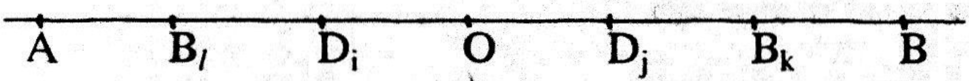
$$\Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AJ}$$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính AJ, với J là trung điểm của BC.

Ví dụ 15. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của nó. Xét 2n điểm của AB sao cho chúng gồm n cặp điểm đối xứng với nhau qua O. Người ta đánh dấu đỏ n điểm bất kỳ, và đánh dấu xanh n điểm còn lại. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ A đến n điểm đỏ bằng tổng các khoảng cách từ B đến n điểm xanh.

BÀI GIẢI

Kí hiệu n điểm đỏ là $D_1, D_2, ..., D_n$ và n điểm xanh là $X_1, X_2, ..., X_n$.



Khoảng cách từ A đến điểm đỏ D_i là : $|\overrightarrow{AD_i}|$, i = 1, 2, ..., n.

Khoảng cách từ B đến điểm xanh X_k là : $|\overrightarrow{BX_k}|$, k = 1, 2, ..., n.

Chú ý rằng : Các véc tơ $\overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{AD_2}, ..., \overrightarrow{AD_n}$ cùng chiều và cùng nằm trên một đường thẳng, nên theo định nghĩa phép cộng véc tơ ta có:

$$|\overrightarrow{AD_1}| + |\overrightarrow{AD_2}| + ... + |\overrightarrow{AD_n}| = |\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} + ... + \overrightarrow{AD_n}| \qquad (1)$$

$$|\overrightarrow{BX_1}| + |\overrightarrow{BX_2}| + ... + |\overrightarrow{BX_n}| = |\overrightarrow{BX_1} + \overrightarrow{BX_2} + ... + \overrightarrow{BX_n}| \qquad (2)$$

Xét véc tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} + ... + \overrightarrow{AD_n}$.

Theo quy tắc 3 điểm, ta có:

$$\vec{u} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD_1}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD_2}) + ... + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD_n})$$

$$= n\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + ... + \overrightarrow{OD_n} \qquad (3)$$

Tương tự, với véc tơ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BX_1} + \overrightarrow{BX_2} + \ldots + \overrightarrow{BX_n}$, ta cũng có hệ thức :

$$\overrightarrow{v} = n\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + \ldots + \overrightarrow{OX_n} \qquad (4)$$

Từ (3) (4) suy ra:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = n(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}) + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \ldots + \overrightarrow{OD_n} + \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + \ldots + \overrightarrow{OX_n}.$$

Do O là trung điểm của AB, nên $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = 0$

Vả lại 2n điểm $D_1, \ldots D_n, X_1, \ldots, X_n$ chia ra làm n cặp đối xứng với nhau qua O, nên:

$$\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \ldots + \overrightarrow{OD_n} + \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + \ldots + \overrightarrow{OX_n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow |\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}| \qquad (5)$$

Vậy từ (1) (2) (5) suy ra :

$|\overrightarrow{AD_1}| + \ldots + |\overrightarrow{AD_n}| = |\overrightarrow{BX_1}| + \ldots + |\overrightarrow{BX_n}|$, tức là tổng các khoảng cách từ A đến n điểm đỏ bằng tổng các khoảng cách từ B đến n điểm xanh ⇒ đ. p. c. m..

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Ba đường phân giác trong của các góc A, B, C kéo dài lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tại A_1, B_1, C_1. Đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với ba cạnh BC, AC, AB tại A_2, B_2, C_2.

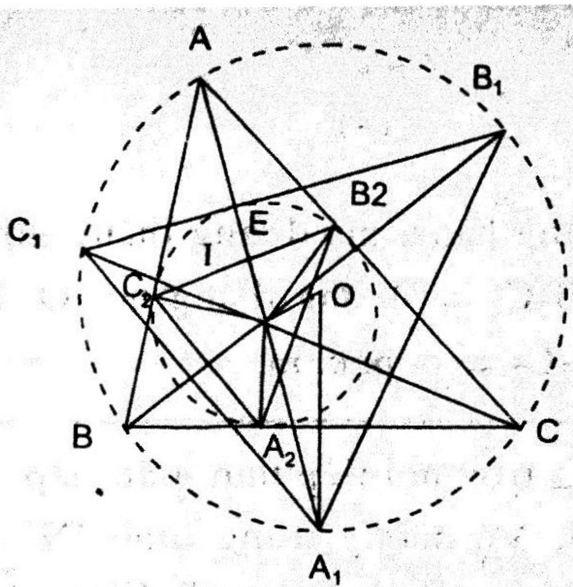
1/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$.

2/ Chứng minh rằng đường thẳng nối O, I chính là đường thẳng Euler của tam giác $A_2B_2C_2$.

BÀI GIẢI

1/ Giả sử $A_1I \cap B_1C_1 = E$

Ta có $\widehat{AEB_1}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn, nên:



$$\text{sđ}\,\widehat{AE_1B_1} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{AB_1} + \text{sđ}\,\widehat{C_1A_1})$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{AB_1} + \text{sđ}\,\widehat{BC_1} + \text{sđ}\,\widehat{BA_1})$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{B} + \text{sđ}\,\widehat{C} + \text{sđ}\,\widehat{A}) = 90^o$$

Vậy $A_1E \perp B_1C_1 \Rightarrow AA_1 \perp B_1C_1$.

Lý luận tương tự có $A_1B_1 \perp CC_1$ và $BB_1 \perp A_1C_1$.

$\Rightarrow$ I là trực tâm của $\Delta\ A_1B_1C_1$.

Rõ ràng O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta\ A_1B_1C_1$, vậy theo ví dụ 2 suy ra trong $\Delta\ A_1B_1C_1$ có:

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$ (1). Đó là đ. p. c. m..

2/ Rõ ràng I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta\ A_2B_2C_2$.

Gọi H_2 là trực tâm của $\Delta\ A_2B_2C_2$ thì đường thẳng Euler của $\Delta\ A_2B_2C_2$ chính là đường thẳng nối I và H_2. Theo ví dụ 2 áp dụng vào $\Delta\ A_2B_2C_2$ có: $\overrightarrow{IH_2} = \overrightarrow{IA_2} + \overrightarrow{IB_2} + \overrightarrow{IC_2}$ (2)

Do OA_1 và IA_2 cùng vuông góc BC và $OA_1 = R$, $IA_2 = r$, ở đây R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại và nội tiếp Δ ABC, hơn thế OA_1 và IA_2 là hai véc tơ cùng phương, cùng chiều.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = \frac{R}{r}\overrightarrow{IA_2}.$$

Lý luận tương tự, có : $\overrightarrow{OB_1} = \frac{R}{r}\overrightarrow{IB_2}$; $\overrightarrow{OC_1} = \frac{R}{r}\overrightarrow{IC_2}$

Vậy từ (1) suy ra: $\overrightarrow{OI} = \frac{R}{r}(\overrightarrow{IA_2} + \overrightarrow{IB_2} + \overrightarrow{IC_2})$ (3)

Từ (2) (3) suy ra : $\overrightarrow{OI} = \frac{R}{r}\overrightarrow{IH_2}$ (4)

Hệ thức (4) chứng tỏ rằng O, I, H_2 thẳng hàng, mà đường thẳng nối I, H_2 là đường thẳng Euler của Δ $A_2B_2C_2$ ⇒ đường thẳng nối O, I chính là đường thẳng Euler của Δ $A_2B_2C_2$ ⇒ đ. p. c. m..

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tại M, N. Vẽ đường trung bình DE (//AB) của tam giác. Đường phân giác góc B cắt DE tại P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

BÀI GIẢI

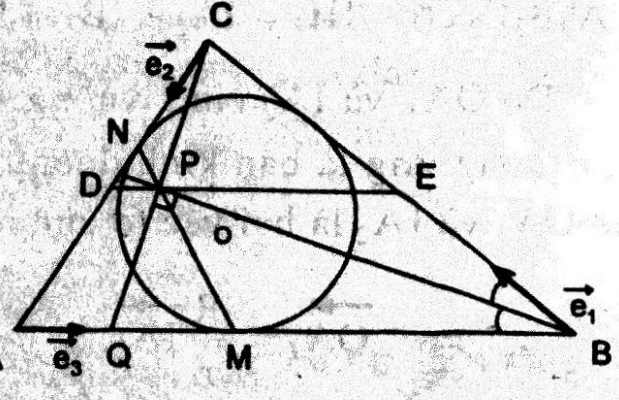
Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}; \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}.$

Gọi $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ là các véc tơ đơn vị và BK là phân giác của góc B; M; N là các điểm tiếp xúc thuộc AB, AC. Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = O$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{ae_1} + \overrightarrow{be_2} + \overrightarrow{ce_3} = O$$

Mặt khác: $\overrightarrow{NA} = (p - a)\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{AM} = (p - a)\overrightarrow{e_3}$; $\overrightarrow{NM} = (p - a)(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$ (1)

Hơn nữa : $\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{ce_3}$,



$\overrightarrow{EP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{ce_3}$ (vì Δ EPB cân)

$\Rightarrow \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}(a - c)\overrightarrow{e_3}$

Vì: $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{be_2}$ nên $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2} - \overrightarrow{be_2} - \frac{1}{2}(a - c)\overrightarrow{e_3}$.

Do vậy: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = \frac{b + c - a}{2}\overrightarrow{e_2} - \frac{b}{2}\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{2}(a - c)\overrightarrow{e_3}$

$$= \frac{c - a}{2}\overrightarrow{e_2} + \frac{c - a}{2}\overrightarrow{e_3} = \frac{c - a}{2}(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \qquad (2)$$

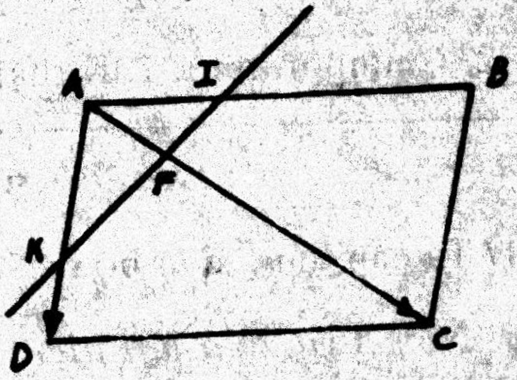
Từ (1) và (2) suy ra M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 18. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, F, K là các điểm xác định bởi: $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$, với $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

BÀI GIẢI



Ta có: $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AK}$

$= \alpha\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AK} = \beta\overrightarrow{AC} - \gamma\overrightarrow{AD}$

mà : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Vậy $\overrightarrow{KF} = \beta\overrightarrow{AB} + (\beta - \gamma)\overrightarrow{AD}$

Điều kiện cần và đủ để K, I, F thẳng hàng là tồn tại số k sao cho: $\overrightarrow{KF} = k\overrightarrow{KI}$

$\Leftrightarrow \quad \beta\overrightarrow{AB} + (\beta - \gamma)\overrightarrow{AD} = k\alpha\overrightarrow{AB} - k\gamma\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \quad (\beta - k\alpha)\overrightarrow{AB} + (\beta - \gamma + k\gamma)\overrightarrow{AD} = O \qquad (*)$

Vì $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ không cùng phương nên:

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (\beta - k\alpha) = 0 = \beta - \gamma + k\gamma$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = k = \frac{\gamma - \beta}{\gamma}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\beta}$

$\Longrightarrow$ đ.p.c.m.

Ví dụ 19. Cho ba tia Ox, Oy, Oz và ba điểm cố định $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$. Xét dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$, trong đó:

$a_1 > 0$ và $a_{k+1} - a_k = d > 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots$

Với mỗi n nguyên dương lấy ba điểm A_n, B_n, C_n lần lượt trên Ox, Oy, Oz sao cho:

$$OA_n = \frac{1}{a_n}OA, \quad OB_n = \frac{1}{a_{n+1}}OB, \quad OC_n = \frac{1}{a_{n+2}}OC$$

1/ Chứng minh rằng các đường thẳng A_nB_n; B_nC_n; C_nA_n lần lượt đi qua các điểm cố định I, J, K.

2/ Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

BÀI GIẢI

1/ Ta cần dùng đến bổ đề sau:

***Bổ đề**: Nếu X và Y là hai điểm phân biệt, thì để đường thẳng XY đi qua điểm S điều kiện cần và đủ là tồn tại các số thực x, y sao cho thỏa mãn đồng thời hệ sau $\forall$ điểm O.*

$$\begin{cases} \overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

(Chứng minh bổ đề trực tiếp dựa vào phân tích véc tơ theo hai véc tơ cho trước, nên chúng tôi bỏ qua).

Theo giả thiết $\forall$ n nguyên dương, ta có: $a_{n+1} - a_n = d$

hay $$\frac{a_{n+1}}{d} - \frac{a_n}{d} = 1 \qquad (1)$$

Gọi I là điểm được xác định bởi hệ thức sau:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_{n+1}}{d}\,\overrightarrow{OB_n} - \frac{a_n}{d}\,\overrightarrow{OA_n} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) và theo bổ đề suy ra đường thẳng A_nB_n đi qua I.

Theo cách xác định A_n và B_n, ta có từ (2):

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_{n+1}}{d}\cdot\frac{\overrightarrow{OB}}{a_{n+1}} - \frac{a_n}{d}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{a_n} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{d}$$

hay $$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{AB}}{d}. \qquad (3)$$

Vế phải của (3) là véc tơ xác định, mà O cố định suy ra I cố định. Như vậy mọi đường thẳng A_nB_n đều đi qua điểm cố định I được xác định bởi (3).

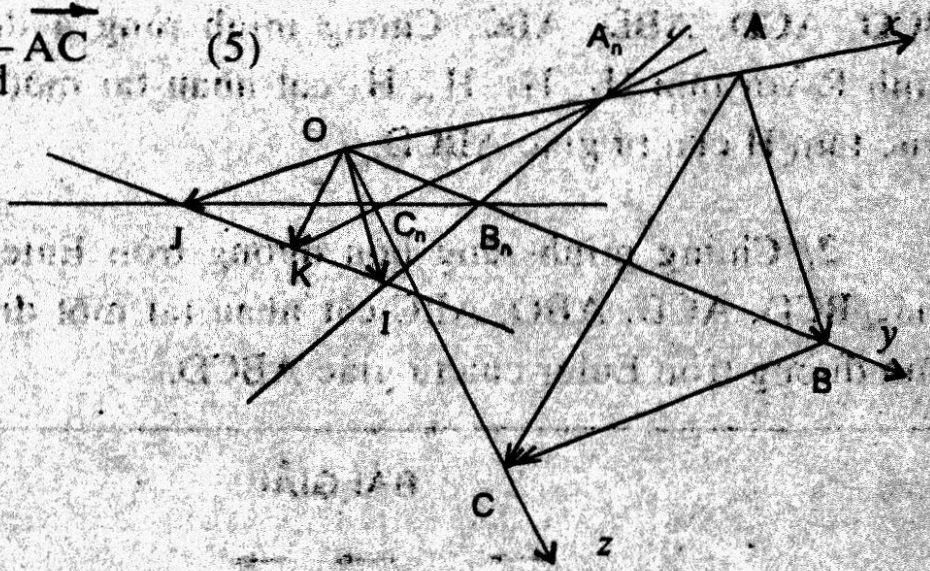
Lý luận hoàn toàn tương tự suy ra đường thẳng B_nC_n luôn đi qua điểm cố định J, được xác định bởi:

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{d}\overrightarrow{BC} \qquad (4)$$

Và đường thẳng C_nA_n luôn đi qua điểm cố định K, được xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d}\overrightarrow{AC} \qquad (5)$$

Đó là đ. p. c. m..



2/ Theo trên ta có:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2d}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$$

hay $$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = 2\overrightarrow{OK} \qquad (6)$$

Đẳng thức (6) chứng tỏ rằng I, J, K thẳng hàng (và hơn thế nữa K là trung điểm của IJ). Đó là đ. p. c. m..

Ví dụ 20. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm H gọi là trực tâm của tứ giác ABCD nếu:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

Gọi E là trung điểm của OH. Đường tròn tâm E bán kính $\frac{R}{2}$ sẽ gọi là đường tròn Euler của tứ giác ABCD.

1/ Gọi H_1, H_2, H_3 H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng 4 đường tròn bán kính R với tâm H_1, H_2, H_3, H_4 cắt nhau tại một điểm chính là trực tâm H của tứ giác ABCD.

2/ Chứng minh rằng bốn đường tròn Euler của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC cắt nhau tại một điểm E chính là tâm đường tròn Euler của tứ giác ABCD.

BÀI GIẢI

1/ Ta có: $$\overrightarrow{HH_4} = |\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OH_4}| \qquad (1)$$

Do H là trực tâm của tứ giác nội tiếp ABCD, nên theo định nghĩa ta có:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$|\overrightarrow{HH_4}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OH_4}| \qquad (3)$$

Do H_4 là trực tâm, và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, nên theo ví dụ 2 ta có:

$$\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) có:

$$HH_4 = |\overrightarrow{OD}| = R$$

Lý luận tương tự:

$$HH_1 = HH_2 = HH_3 = R$$

$$\Rightarrow \qquad HH_1 = HH_2 = HH_3 = HH_4 = R$$

Vậy 4 đường tròn bán kính R với tâm H_1, H_2, H_3, H_4 cắt nhau tại một điểm chính là trực tâm H của tứ giác ABCD.

2/ Gọi E_4 là tâm đường tròn Euler của ΔABC, thì:

$$EE_4 = |\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OE_4}| \qquad (5)$$

Do E là tâm đường tròn Euler của tứ giác ABCD, nên:

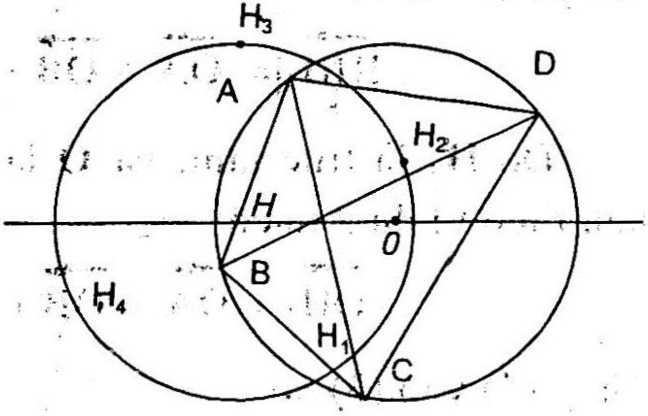
$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \qquad (6)$$

Do E_4 là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC (với trực tâm là H_4), ta có: $\overrightarrow{OE_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (7)

Thay (6) (7) vào (5) có : $EE_4 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OD}| = \frac{R}{2}$ (8)

Tương tự nếu gọi E_1, E_2, E_3 là tâm các đường tròn Euler của các tam giác BCD, ACD, ABD, thì cũng có: $EE_1 = EE_2 = EE_3 = \frac{R}{2}$ (9)

Các đẳng thức (8) (9) chứng tỏ rằng các tâm E_1, E_2, E_3, E_4 nằm trên đường tròn Euler của tứ giác ABCD, hay các đường tròn Euler của bốn tam giác BCD, ACD, ABD và ABC cắt nhau tại tâm E của đường tròn Euler của tứ giác ABCD. Đó là đ.p.c.m.



§ 2. TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VÉC TƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

A- TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM TRÊN TRỤC.

1. Hệ thức Salơ. Cho ba điểm A, B, C tuỳ ý trên trục x'Ox, khi đó ta có:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

2. Công thức tính AB.

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_B - x_A$$

3. Trung điểm của một đoạn.

Trên trục x'Ox, cho hai điểm A, B và trung điểm I của AB. Ta có:

a) $\overline{IA} + \overline{IB} = 0$

b) $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$ với M là điểm tuỳ ý trên trục. Đặc biệt ta có: $\overline{OA} + \overline{OB} = 2\,\overline{OI}$ hay $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

4. Bốn điểm A, B, C, D lập thành một hàng điểm điều hoà nếu:

+ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ hoặc: $(x_A + x_B)(x_C + x_D) = 2(x_Ax_B + x_Cx_D)$

(hệ thức cơ bản).

+ $IA^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ (I là trung điểm của AB - Hệ thức Niu tơn).

+ $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ (Hệ thức Đề các).

B- TOẠ ĐỘ ĐỀ CÁC VUÔNG GÓC

1. Véc tơ bằng nhau.

Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Ta có:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

2. Toạ độ của $\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{ma}$, $m \in R$.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\overrightarrow{ma} = (ma_1, ma_2)$$

3. Công thức tính toạ độ của một véc tơ $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

4. Toạ độ của trung điểm.

Nếu I là trung điểm của AB thì toạ độ của I là:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

5. Môdun của véc tơ. Khoảng cách giữa hai điểm.

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Cho I là tâm tỉ cự của ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC với bộ số (α, β, γ), $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$. Biết ba đỉnh A, B, C có toạ độ là:

$A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$. Tìm toạ độ của I.

BÀI GIẢI

Vì I là tâm tỉ cự của A, B, C theo bộ số (α, β, γ) nên ta có:

$$\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = 0 \qquad (1)$$

Gọi (x^*, y^*) là toạ độ của I $\Rightarrow$ $\overrightarrow{IA} = (x_1 - x^*, y_1 - y^*)$

$$\overrightarrow{IB} = (x_2 - x^*, y_2 - y^*)$$

$$\overrightarrow{IC} = (x_3 - x^*, y_3 - y^*)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = [\alpha (x_1 - x^*) + \beta (x_2 - x^*) + \gamma (x_3 - x^*);$$
$$\alpha(y_1 - y^*) + \beta(y_2 - y^*) + \gamma(y_3 - y^*)].$$

Vì vậy từ (1) suy ra hệ phương trình sau đã xác định x^* và y^*.

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^* = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 - (\alpha + \beta + \gamma)y^* = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad x^* = \frac{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y^* = \frac{\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Chú ý: *Vì trọng tâm G của tam giác ABC là tâm tỉ cự của ba đỉnh A, B, C theo bộ số (1,1,1), vậy từ công thức trên, ta suy ra công thức tìm toạ độ trọng tâm theo toạ độ các đỉnh của tam giác như sau:*

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Ví dụ 2. Trên trục số cho bốn điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà (A, B liên hợp điều hoà với C, D).

a) Chứng minh $AB^2 + CD^2 = 4IJ^2$ (I,J lần lượt là các trung điểm của AB, CD).

b) Gọi A', B' lần lượt là các điểm liên hợp điều hoà của D đối với A, C; B, C. Chứng minh A', B', C, D là một hàng điểm điều hoà.

c) Chứng minh: $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} = 0$

BÀI GIẢI

a) Theo hệ thức Niu tơn ta có: $IA^2 = \overline{IC}.\,\overline{ID}$

$$\overline{IC} = \overline{IJ} + \overline{JC};\ \overline{ID} = \overline{IJ} + \overline{JD} = \overline{IJ} - \overline{JC}$$

Do đó: $IA^2 = (\overline{IJ} + \overline{JC})\,(\overline{IJ} - \overline{JC}) = IJ^2 - JC^2.$

mà $IA^2 = \frac{AB^2}{4}$ và $JC^2 = \frac{CD^2}{4}$ nên

$$\frac{AB^2}{4} = IJ^2 - \frac{CD^2}{4} \Rightarrow AB^2 + CD^2 = 4IJ^2.$$

b) Ta có A', D, A, C và B', D, B,C là các hàng điểm điều hoà nên theo hệ thức Đề các ta có:

$$\frac{2}{\overline{DA'}} = \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DC}} \quad \text{và} \quad \frac{2}{\overline{DB'}} = \frac{1}{\overline{DB}} + \frac{1}{\overline{DC}}$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

$$\frac{2}{\overline{DA'}} + \frac{2}{\overline{DB'}} = \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}} + \frac{2}{\overline{DC}}$$

Vì A, B, C, D là hàng điểm điều hoà nên:

$$\frac{2}{\overline{DC}} = \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}}. \qquad \text{Từ đó:} \qquad \frac{2}{\overline{DA'}} + \frac{1}{\overline{DB'}} = \frac{4}{\overline{DC}}$$

hay $\frac{2}{\overline{DC}} = \frac{1}{\overline{DA'}} + \frac{1}{\overline{DB'}}$, suy ra A', B', C, D là hàng điểm điều hoà.

c) Theo hệ thức Đề các ta có:

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}} \qquad \text{và} \qquad \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} = \frac{2}{\overline{BA}} = -\frac{2}{\overline{AB}}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} = \frac{2}{\overline{AB}} - \frac{2}{\overline{AB}} = 0$$

Ví dụ 3. Cho họ đường cong $y = x^2 - 2mx + m + 2$. Gọi $\mathcal{M}$ là tập các giá trị của m, mà parabol $y = x^2 - 2mx + m + 2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng: $\forall m \in \mathcal{M}$, hai điểm di động A, B luôn liên hợp điều hoà với hai điểm cố định C, D.

BÀI GIẢI

Parabol $y = x^2 - 2mx + m + 2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình: $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là khi và chỉ khi:

$$\Delta' = m^2 - m - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad m < -1 \text{ hoặc } m > 2$$

Như vậy $\mathcal{M} = \{m: m < -1 \text{ hoặc } m > 2\}$, rõ ràng tập $\mathcal{M}$ có vô hạn phần tử.

Trên trục x'Ox, gọi toạ độ của hai điểm cố định C, D phải tìm tương ứng là c, d. Toạ độ của A, B chính là x_1, x_2 ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Do A, B liên hợp điều hoà với C, D nên theo hệ thức cơ bản, ta có:

$$(x_1 + x_2)(c + d) = 2(x_1x_2 + cd) \qquad (2)\ \forall m \in \mathcal{M}$$

Theo định lý Viet, thì $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = m + 2$, vậy (2) có dạng:

$$2m(c + d) = 2(m + 2 + cd) \qquad \forall m \in \mathcal{M}$$

$$\Leftrightarrow \quad m(c + d - 1) = cd + 2 \qquad (3) \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

Do $\mathcal{M}$ là tập vô hạn, nên từ (3) suy ra:

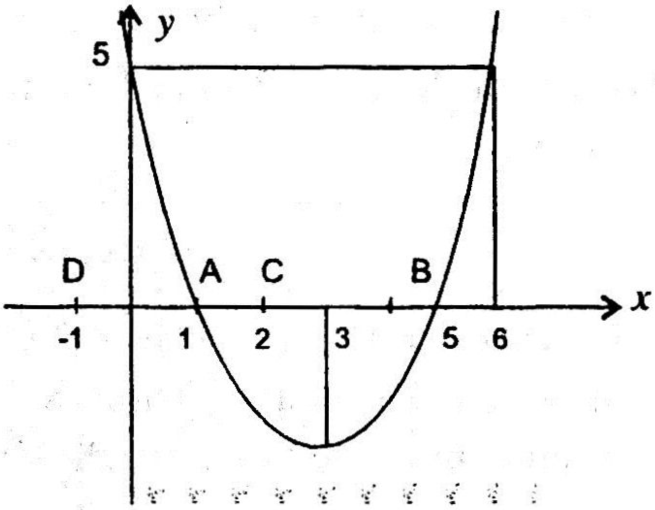
$$\begin{cases} c + d - 1 = 0 \\ cd + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 1 \\ cd = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 2, d = -1 \qquad \text{hoặc } c = -1, d = 2.$$

Vậy hai điểm cố định cần tìm luôn liên hợp điều hoà với A, B là các điểm C, D nằm trên trục hoành có toạ độ là C (2 , 0) và D(-1, 0)

(Hình vẽ ứng với

$m = 3$: $y = x^2 - 6x + 5$)



Ví dụ 4. Cùng câu hỏi như trong ví dụ 3 nhưng xét với:

1/ Họ parabol $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1$ với $m \neq 2$

2/ Họ parabol $y = (m + 5)x^2 - 2m^2x + 4(m + 5)$ với $m \neq -5$.

BÀI GIẢI

1/ Gọi $\mathcal{M}$ là tập các giá trị của m để họ parabol:

$y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1$ $(m \neq 2)$ cắt trục hoành Ox tại 2 điểm phân biệt A, B. Dễ thấy $\mathcal{M}$ là tập vô hạn. Hoành độ x_1, x_2 của các điểm A, B chính là nghiệm của phương trình:

$$(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

Ta có: $x_1 = \overline{OA}$; $x_2 = \overline{OB}$, vì thế:

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{\dfrac{2(m+1)}{m-2}}{\dfrac{m+1}{m-2}} = 2$$

Đặt C là điểm có toạ độ C(1, 0), khi đó OC = 1.

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{2}{\overline{OC}} \qquad (2)$$

Theo hệ thức Đề Các suy ra A, B luôn liên hợp điều hòa với hai điểm cố định O (0, 0) và C (1, 0) $\forall m \in \mathcal{M} \Rightarrow$ đ. p. c. m..

2/ Tập $\mathcal{M}$ các giá trị của tham số m để họ parabol:

$y = (m + 5)x^2 - 2m^2x + 4(m + 5)$ cắt Ox tại A, B phân biệt, dĩ nhiên cũng là vô hạn (bạn đọc tự nghiệm lấy điều này). Hoành độ x_1, x_2 của các điểm A, B tương ứng chính là nghiệm của phương trình:

$$(m + 5)x^2 - 2m^2x + 4(m + 5) = 0 \qquad (3)$$

Ta có: $\overline{OA}.\overline{OB} = x_1x_2 = 4$

Lấy C (2, 0) và D (-2, 0), khi đó O là trung điểm của CD và ta có: $\overline{OA}.\overline{OB} = OC^2 = OD^2$ (4)

Từ (4) và theo hệ thức Niu tơn suy ra $\forall m \in \mathcal{M}$, thì hai điểm di động A, B luôn liên hợp điều hoà với hai điểm cố định C(2, 0) và D(-2, 0) $\Rightarrow$ đ. p. c. m..

Chú ý: *Dĩ nhiên để giải ví dụ 4 có thể áp dụng hệ thức cơ bản:*

$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$, như đã dùng trong ví dụ 3, nhưng sử dụng hệ thức Đề Các và Niu tơn cho ta lời giải gọn gàng hơn nhiều.

Ví dụ 5. Gọi I và J tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Từ I, J kẻ các đường DE, FG song song với BC. Các đường song song này lần lượt cắt các đường thẳng AB, AC tại D, E, F, G. Chứng minh:

$$\frac{2}{\overline{BC}} = \frac{1}{\overline{DE}} + \frac{1}{\overline{FG}}$$

BÀI GIẢI

Rõ rằng I, J tương ứng chính là giao điểm của đường phân giác trong AM với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Theo định lý đường phân giác, ta có:

$$\frac{IA}{IM} = \frac{BA}{BM} \text{ và } \frac{JA}{JM} = \frac{BA}{BM}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{IA}}{\overline{IM}} = -\frac{\overline{JA}}{\overline{JM}}$$

Vậy A, M liên hợp điều hoà với I, J. Do DE // FG // BC, vậy theo định lý Talet suy ra A, B cũng liên hợp điều hoà với D, F.

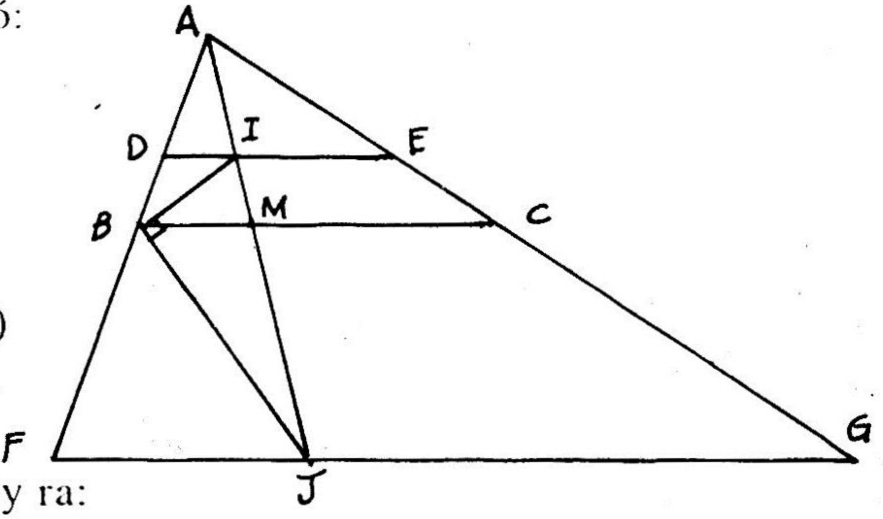
Áp dụng hệ thức Đề Các với hàng điểm điều hoà ADBF, ta có:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{AF}} \qquad (1)$$

Theo định lý Talet, ta có:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FG}}=k$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overline{AB}=k\,\overline{BC}\\ \overline{AD}=k\,\overline{DE}\\ \overline{AF}=k\,\overline{FG}\end{cases}\qquad(2)$$



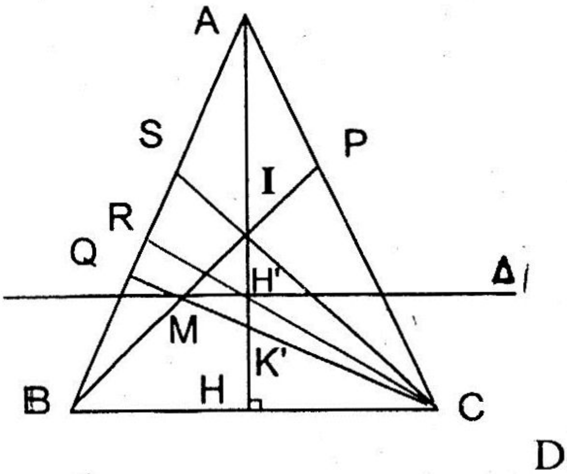
Vậy thay (2) vào (1), suy ra:

$$\frac{2}{\overline{BC}}=\frac{1}{\overline{DE}}+\frac{1}{\overline{FG}}.$$ Đó là đ. p. c. m..

Ví dụ 6. Cho tam giác cân ABC và một đường thẳng Δ // đáy BC. M là một điểm di động trên Δ. Đường thẳng BM cắt cạnh AC tại P, đường thẳng CM cắt cạnh AB tại Q. Chứng minh:

$$\frac{1}{\overline{BQ}}+\frac{1}{\overline{CP}}=const$$

BÀI GIẢI



Vẽ đường cao AH. Giả sử:

AH ∩ Δ = H', AH ∩ BM = I

CI ∩ AB = S, AH ∩ Δ = H'

CH' ∩ AB = R, CQ ∩ AH = K'

Do Δ // BC, nên theo định lý Talet có:

$$\frac{H'I}{HI}=\frac{MH'}{BH}\quad(1)\qquad\qquad \frac{H'K'}{HK'}=\frac{MH'}{HC}\quad(2)$$

Do BH = HC từ (1) (2) suy ra: $\dfrac{\overline{H'K'}}{\overline{KH}} = -\dfrac{\overline{IH'}}{\overline{IH}}$ (3)

Từ (3) suy ra I, K' liên hợp điều hoà với H', H ⇒ chùm (C.IH'K'H) là một chùm điều hoà. Cát tuyến AB cắt chùm điều hoà này sẽ tạo thành hàng điểm điều hoà SRQB (S, Q liên hợp điều hoà với R, B). Vì thế theo hệ thức Đề Các có:

$$\frac{1}{\overline{BQ}} = \frac{1}{\overline{BS}} = \frac{2}{\overline{BR}} \qquad (4)$$

Do ABC là tam giác cân, mà I ∈ đường cao AH ⇒ $\overline{BS} = \overline{CP}$.

Do C, H' cố định ⇒ R = CH' ∩ AB cũng là điểm cố định, nên từ (4) có:

$$\frac{1}{\overline{BQ}} = \frac{1}{\overline{CP}} = \frac{2}{\overline{BR}} = \text{const}$$

không phụ thuộc vị trí M trên Δ ⇒ đ. p. c. m..

Ví dụ 7. *(Định lý Mênêlauýt)*

Cho tam giác ABC, và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

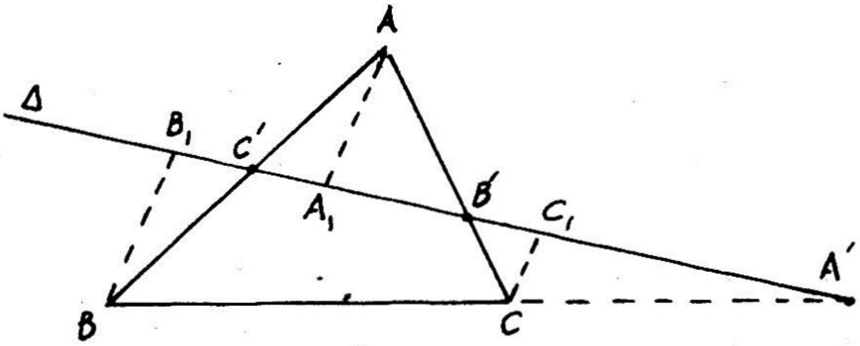
BÀI GIẢI

1/ Giả sử A', B', C' thẳng hàng thuộc đường thẳng Δ. Vẽ từ A, B, C ba đường song song bất kỳ tương ứng cắt Δ tại A_1, B_1, C_1. Theo định lý Talet, có:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}$$

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{AA_1}}$$

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}$$

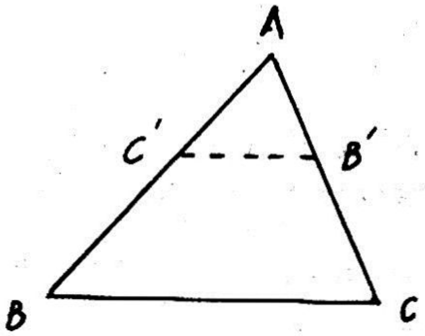


Nhân từng vế của ba đẳng thức trên ta có:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \qquad (1)$$

2/ Giả sử với tam giác ABC ta có hệ thức (1). Trước hết ta chứng minh rằng đường thẳng B'C' phải cắt đường thẳng BC. Thực vậy, nếu B'C' // BC ta sẽ có:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \Leftrightarrow \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$



So sánh đẳng thức này với hệ thức (1) ở trên ta suy ra:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1.$$

Điều này có nghĩa là điểm A' chia đoạn BC theo tỷ số k = 1 là điều không chấp nhận được (theo chú ý ở phần định nghĩa). Vậy đường thẳng B'C' phải cắt đường thẳng BC.

Gọi A'' là giao điểm của B'C' và BC. Vì A'', B', C' thẳng hàng nên theo phần 1) ta có:

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

So sánh hệ thức này với hệ thức (1) của định lý ta rút ra: $\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$. Vậy A'' và A' cùng chia đoạn BC theo cùng một tỉ số nên A'' trùng với A, và ta có A', B', C' thẳng hàng. Đó là đ. p. c. m..

Ví dụ 8. *(Định lý Xêva)*

Cho ΔABC và các điểm A',B',C' lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hay song song là:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

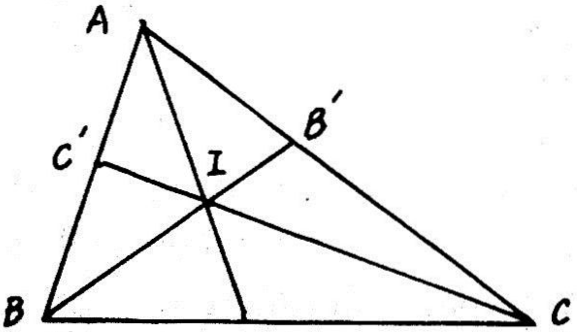
BẢI GIẢI

Ta chỉ chứng minh điều kiện cần, điều kiện đủ chứng minh tương tự như cách dùng trong ví dụ 7 và xin dành cho bạn đọc.

Giả sử các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm I. Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác AA'B và ba điểm thẳng hàng I, C, C' rồi cho tam giác AA'C và ba điểm thẳng hàng I, B, B' ta có:

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.\frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = 1$$

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}.\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1$$



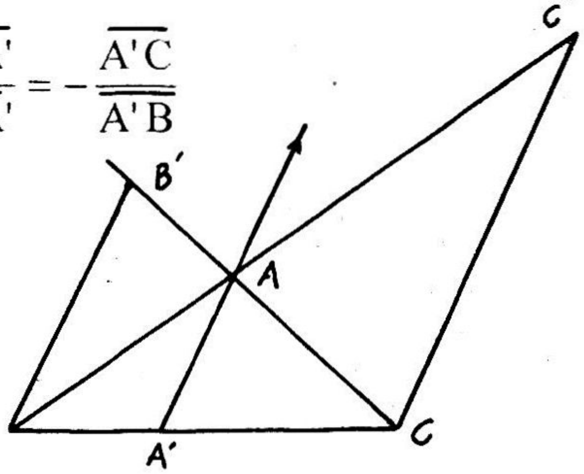
Nhân từng vế của hai đẳng thức trên ta sẽ tìm được hệ thức phải chứng minh.

Trường hợp AA' // BB' // CC' ta có:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} \text{ và } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}.$$

Nhân từng vế của hai đẳng thức trên và rút gọn ta được:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}\cdot\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}=-\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$$



Do đó:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1$$

Nhận xét:

Ta có thể xem trường hợp AA'//BB'//CC'

như là các đường thẳng này đồng quy tại một điểm I ở vô tận.

Ví dụ 9. *(Định lý Đề Sác)*

Trong mặt phẳng cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm, và các cặp đường thẳng BC, B'C'; CA, C'A'; AB, A'B' đều cắt nhau.

Chứng minh rằng các giao điểm của chúng thẳng hàng.

BÀI GIẢI.

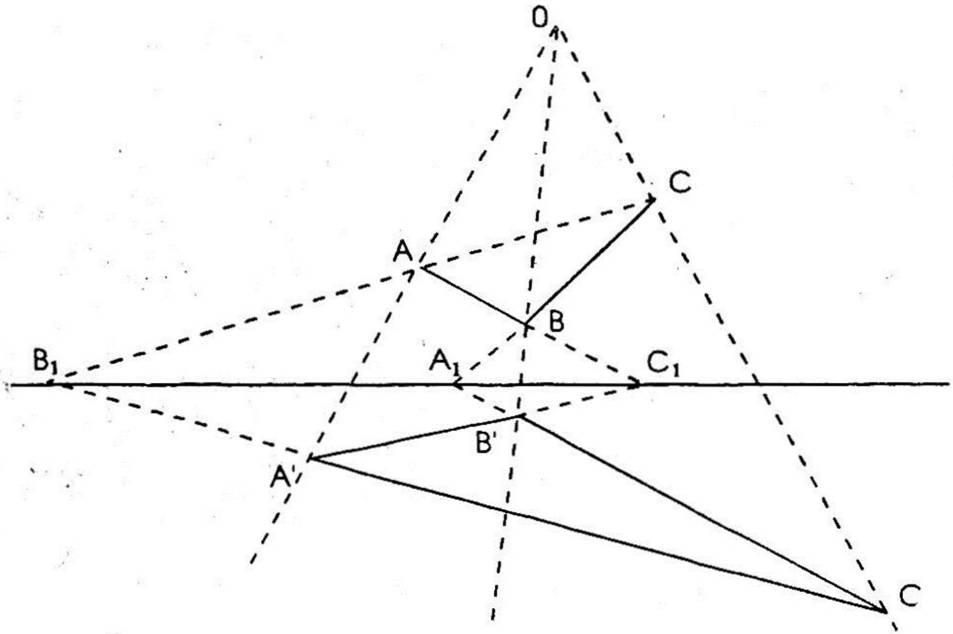
Giả sử AA', BB', CC' đồng quy tại O, và giả sử:

$$BC \cap B'C' = A_1$$

$$CA \cap C'A' = B_1$$

$$AB \cap A'B' = C_1$$

Áp dụng định lý Mênêlauýt cho các Δ OBC, OCA, OAB với các cát tuyến tương ứng $A_1C'B'$, $B_1A'C'$ và $C_1B'A'$, ta có:



$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'O}}\cdot\frac{\overline{B'O}}{\overline{B'B}}=1$$

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}}\cdot\frac{\overline{C'O}}{\overline{C'C}}=1$$

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\cdot\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'O}}\cdot\frac{\overline{A'O}}{\overline{A'A}}=1$$

Nhân từng vế của ba đẳng thức này lại và rút gọn ta được:

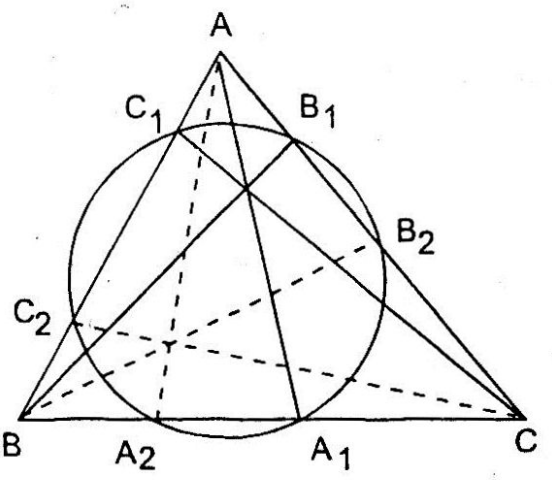
$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1$$

Hệ thức này chứng tỏ ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và lần lượt nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Đó là đ. p. c. m..

Ví dụ 10. Cho ba điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Gọi A_2, B_2, C_2 là giao điểm của đường tròn đi qua ba điểm A_1, B_1, C_1 với các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 cũng đồng quy.

BÀI GIẢI



Vì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên ta có:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-1$$

Mặt khác ta có:

$$\overline{AB_1}.\ \overline{AB_2}=\overline{AC_1}.\ \overline{AC_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}}$$

$$\overline{BA_2}.\ \overline{BA_1}=\overline{BC_2}.\ \overline{BC_1}\Leftrightarrow\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{BC_2}}{\overline{BA_2}}$$

$$\overline{CA_1}.\ \overline{CA_2}=\overline{CB_2}.\ \overline{CB_1}\Leftrightarrow\frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}}=\frac{\overline{CA_2}}{\overline{CB_2}}$$

Ta suy ra :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{C_2B}}{\overline{B_2C}}\cdot\frac{\overline{A_2C}}{\overline{C_2A}}\cdot\frac{\overline{B_2A}}{\overline{A_2B}}$$

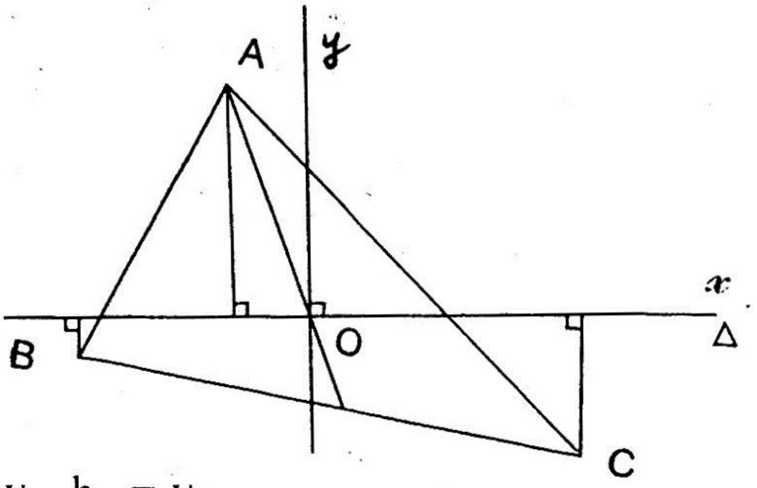
$$=\frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}}\cdot\frac{\overline{C_2B}}{\overline{C_2A}}\cdot\frac{\overline{B_2A}}{\overline{B_2C}}=-1$$

Vậy: AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC, Δ là một đường thẳng bất kỳ qua trọng tâm tam giác. Chứng minh tổng đại số các khoảng cách từ A, B, C đến Δ bằng 0.

BÀI GIẢI

Gọi O là trọng tâm ΔABC. Lấy Δ là trục Ox, rồi dựng hệ trục toạ độ Oxy.



Giả sử trong hệ toạ độ này các đỉnh A, B, C của tam giác có toạ độ là: $A(x_1,y_1)$; $B(x_2,y_2)$; $C(x_3,y_3)$. Gọi h_A, h_B, h_C là khoảng cách tương ứng từ A, B, C xuống Δ, thì ta có:

$$h_A = |y_1| \Rightarrow \text{sgn}y_1 .\ h_A = y_1.$$

Tương tự có: $y_2 = \text{sgn}y_2 .\ h_B$.

$$y_3 = \text{sgn}y_3 .\ h_C.$$

Do O là trọng tâm ΔABC, nên ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$ (1)

Vì $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$; $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$; $\overrightarrow{OC} = (x_3, y_3)$

Vậy từ (1), nói riêng ta có:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \text{ hay}$$

$$\text{sgn}y_1 .\ h_A + \text{sgn}y_2 .\ h_B + \text{sgn}y_3 .\ h_C = 0 \qquad (2)$$

Đẳng thức (2) chứng tỏ rằng tổng đại số các khoảng cách từ A, B, C xuống Δ = 0 ⇒ đ. p. c. m..

Chú ý: Nhắc lại định nghĩa sau:

$$sgn\ x = \begin{cases} 1, \text{ nếu } x > 0 \\ 0, \text{ nếu } x = 0 \\ -1, \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 12. Cho 2n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_n$ sao cho:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 > 0 \qquad \forall i \neq j;\ i,j = 1,2,...,n.$$

Giả sử $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ là n số thực sao cho $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0$

.Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \ge \frac{n}{|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n|}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)^2}$$

(ở đây ta dùng ký hiệu $\sum_{i=1}^{n} a_i$ để chỉ tổng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$).

BÀI GIẢI

Trên hệ trục toạ độ xét n điểm $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,\ldots, n$.

Từ giả thiết $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 > 0, \quad \forall i \neq j$

suy ra : $A_i \neq A_j$, $\forall i \neq j$. Vậy đó là n điểm phân biệt. Gọi I là tâm tỉ cự của n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ theo bộ số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tức là ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{IA_i} = 0 \qquad (1)$$

Gọi toạ độ của I là $I(x,y)$, thì $IA_i = (x_i - x; y_i - y)$

Từ (1) suy ra:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i - x) = 0\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y_i - y) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\\ y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\end{cases}$$

Vì I là tâm tỉ cự như trên, nên hiển nhiên ta có:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = n\overrightarrow{OI}$$

Vì $|\overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{OA_2}| + \ldots + |\overrightarrow{OA_n}| \ge |\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}| = n|\overrightarrow{OI}|$ (2)

và do $\begin{cases} |\overrightarrow{OA}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \forall_i = 1,2,\dots,n \\ |\overrightarrow{OI}| = \dfrac{1}{|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n|}\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)^2} \end{cases}$

nên từ (2) có ngay:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \ge \frac{n}{|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n|}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)^2}$$

Đó là đ. p. c. m..

Dấu bằng xảy ra ⇔ các véc tơ $\overrightarrow{OA}_1, \overrightarrow{OA}_2, \dots, \overrightarrow{OA}_n$ cùng phương, cùng chiều, tức là $\forall_i = 2, \dots, n$, có:

$$\begin{cases} x_i = k_i x_1 \\ y_i = k_i y_1 \end{cases} \quad \text{ở đây } k_i \ge 0$$

Ví dụ 13. cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số thực bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2 + (1 - a_{i+1})^2} \ge \frac{n\sqrt{2}}{2}.\ \text{Với quy ước } a_{n+1} \equiv a_1$$

BÀI GIẢI

Xét n véc tơ với các toạ độ như sau:

$\overrightarrow{u_1} = (a_1, 1 - a_2)$; $\overrightarrow{u_2} = (a_2, 1 - a_3)$ .....

……

$\overrightarrow{u_{n-1}} = (a_{n-1}, 1 - a_n)$; $\overrightarrow{u_n} = (a_n, 1 - a_1)$

Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \dots + \overrightarrow{u_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n, n - a_1 - a_2 - \dots - a_n)$$

Rõ ràng ta có:

$$|\vec{u_1}| + |\vec{u_2}| + \dots + |\vec{u_n}| \ge |\vec{u_1} + \vec{u_2} + \dots + \vec{u_n}| \qquad (1)$$

Vì $|\vec{u_i}| = \sqrt{a_i^2 + (1 - a_{i+1})^2} . i = 1, 2, \dots, n.$

$$|\vec{u_1} + \vec{u_2} + \dots + \vec{u_n}| = \sqrt{k^2 + (n - k)^2}$$

với $k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Từ đó thay vào (1), ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + \left(1 - a_{i+1}\right)^2} \ge \sqrt{k^2 + \left(n - k\right)^2} \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng: $\sqrt{k^2 + \left(n - k\right)^2} \ge \frac{n\sqrt{2}}{2}$ (3)

Thật vậy: (3) $\Leftrightarrow k^2 + n^2 + k^2 - 2nk \ge \frac{n^2}{2}$

$\Leftrightarrow n^2 - 4nk + 4k^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (n - 2k)^2 \ge 0$ (4)

Vì (4) đúng, vậy (3) đúng. Từ (2) và (3) suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + \left(1 - a_{i+1}^2\right)} \ge \frac{n\sqrt{2}}{2}$$ $\Rightarrow$ **Đó là đ. p. c. m..**

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai điều kiện sau đồng thời xảy ra:

1. Các véc tơ $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}$ cùng phương, cùng chiều.

2. $n = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

Có thể thấy được có dấu đẳng thức trong các khả năng sau:

1. Nếu n là số chẵn: Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$a_1 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a.$

$a_2 = a_4 = \ldots = a_n = 1 - a$, với a tùy ý.

2. Nếu n là số lẻ: Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 14. Cho x, y, z tùy ý. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

BÀI GIẢI

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \qquad (1)$$

Trên mặt phẳng toạ độ xét ba điểm:

$$A\left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}z\right); \quad B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right); \quad C\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}, 0\right).$$

* * *

Khi đó dễ thấy: (1) $\Leftrightarrow$ $CA + AB \geq CB$ (2)

Vì (2) hiển nhiên đúng, vậy (1) đúng và đó là đ. p. c. m..

Dấu đẳng thức xảy ra ⇔ các véc tơ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương, cùng chiều.

Ta có : $\overrightarrow{CA} = \left(x + \frac{z}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$, còn $\overrightarrow{AB} = \left(-x - \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

Vậy để có dấu đẳng thức, ta cần có:

$$\begin{cases} x + \frac{z}{2} = k\left(-x - \frac{y}{2}\right) & (3) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}z = k\frac{\sqrt{3}}{2}y & (4) \end{cases} \quad \text{với } k \geq 0$$

$$\text{Ta có (3) (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} z = ky \\ x + \frac{ky}{2} = -kx - \frac{ky}{2} \\ k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = ky \\ x(1 + k) = -ky \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Vậy có dấu bằng trong bất đẳng thức trên, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} z = ky & (5) \\ x = -\frac{k}{1+k}y & (6) \end{cases}$$

Vậy y tuỳ ý và k ≥ 0 tuỳ ý.

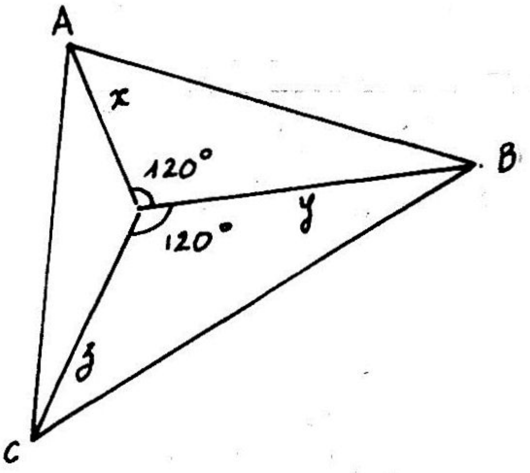
***Chú ý**: Với $\forall x, y, z > 0$, thì (5) (6) không thể thoả mãn, tức là nói riêng $\forall x, y, z > 0$, ta luôn có:*

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} > \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

- Với $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, ta có cách đơn giản sau để chứng minh bất đẳng thức trên.

Đặt $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ và $\widehat{AOB} = 120^o$, $\widehat{BOC} = 120^o$
$\Rightarrow \widehat{COA} = 120^o$.

Theo định lý hàm số cosin (hoặc nếu chưa biết dùng định lý Pitago) có:



$$AB = \sqrt{x^2 + y^2 + xy};$$

$$BC = \sqrt{y^2 + z^2 + yz};$$

$$CA = \sqrt{x^2 + z^2 + xz}$$

Do $AB + AC > BC$

$\Rightarrow$ *đ. p. c. m..*

Ví dụ 17. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \ldots + \sqrt{1+x_{1997}} = 1997\sqrt{\dfrac{1998}{1997}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \ldots + \sqrt{1-x_{1997}} = 1997\sqrt{\dfrac{1998}{1997}} \end{cases}$$

BÀI GIẢI

Xét véc tơ $\vec{a_i} = \left(\sqrt{1+x_i}, \sqrt{1-x_i}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, 1997$

Khi đó ta có: $|\vec{a_i}| = \sqrt{2}$ $\quad\forall i = \overline{1,1997}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{1997} |\vec{a_i}| = 1997\sqrt{2} \qquad (1)$$

Theo phép cộng tọa độ của véc tơ tổng, ta có:

$$\sum_{i=1}^{1997} \vec{a_i} = \left(\sum_{i=1}^{1997} \sqrt{1+x_i} \;,\; \sum_{i=1}^{1997} \sqrt{1-x_i} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum_{i=1}^{1997}\vec{a}_i\right| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{1997}\sqrt{1+x_i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{1997}\sqrt{1-x_i}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1997.\ 1998 + 1997.\ 1996} = 1997\sqrt{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\left|\sum_{i=1}^{1997}\vec{a}_i\right| = \sum_{i=1}^{1997}|\vec{a}_i|$ (3)

Đẳng thức (3) chứng tỏ rằng các véc tơ a_i cùng phương, cùng chiều, cùng độ dài nên suy ra: $x_1 = x_2 = ... = x_{1997}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+x_1} = \sqrt{1 \pm x_2} = ... = \sqrt{1+x_{1997}} = \sqrt{\frac{1998}{1997}}$$

hay hệ đã cho có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = x_2 = ... = x_{1997} = \frac{1}{1997}$$

Ví dụ 18. Cho A, B cố định. Tìm quỹ tích của điểm M sao cho:

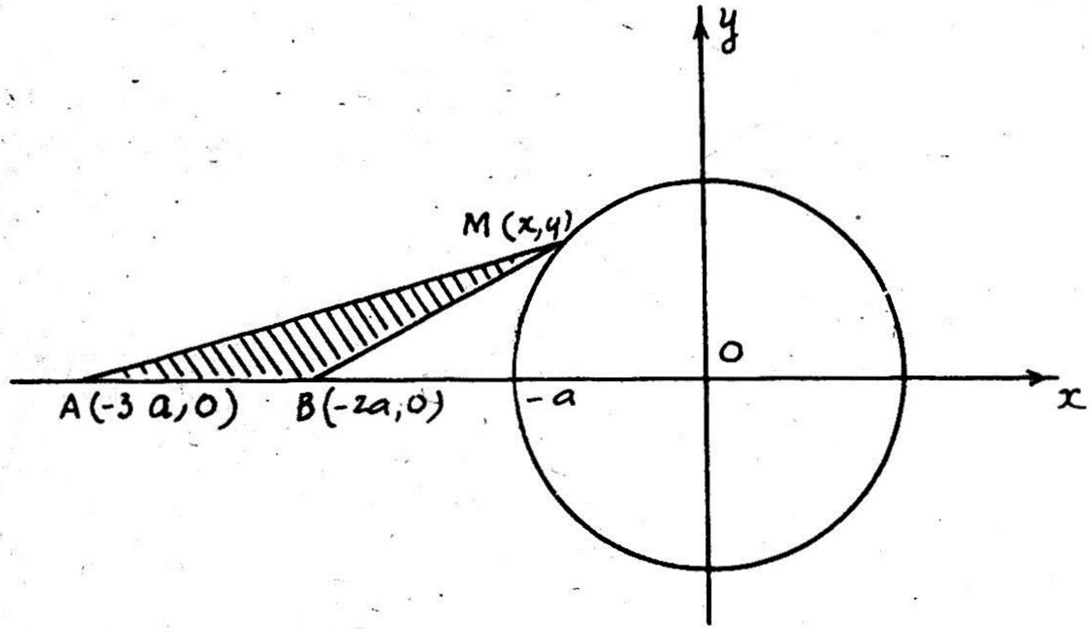
$$2MA^2 - 3MB^2 = 5AB^2.$$

BÀI GIẢI

Gọi O là điểm thoả mãn hệ thức $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = 0$, tức là $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$. Giả sử AB = a. Lập hệ trục toạ độ Oxy nhận O làm gốc toạ độ, chiều dương của trục hoành hướng từ A đến B. Trong hệ trục toạ độ ấy, ta có toạ độ các điểm A, là A(- 3a, 0); B(-2a, 0).

Giả sử toạ độ của điểm M phải tìm là M(x, y). Khi đó:

$$2MA^2 - 3MB^2 = 5AB^2.$$



$\Leftrightarrow \quad 2[(x + 3a)^2 + y^2] - 3[(x + 2a)^2 + y^2 = 5a^2.$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 12ax + 18a^2 + 2y^2 - 3x^2 - 12xa - 12a^2 - 3y^2 = 5a^2.$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 \qquad (1)$

Từ (1) suy ra quỹ tích cần tìm là đường tròn tâm O , bán kính R = AB.

Ví dụ 19. Cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng. Một đường thẳng Δ di động qua C. M là điểm trên Δ sao cho đại lượng $2MA^2 + 3MB^2$ đạt giá trị bé nhất.

Tìm quỹ tích của M.

BÀI GIẢI

Lấy O là điểm trên đoạn AB sao cho $2\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB}$, rồi lấy O làm gốc toạ độ, trục tung trùng với AB và có chiều dương hướng từ B đến A. Trong hệ trục ấy ta có thể giả sử toạ độ của các điểm A, B là A(0,3); B(0, -2). Giả sử điểm $M_o(x_o, y_o) \in \Delta$ thoả mãn điều kiện:

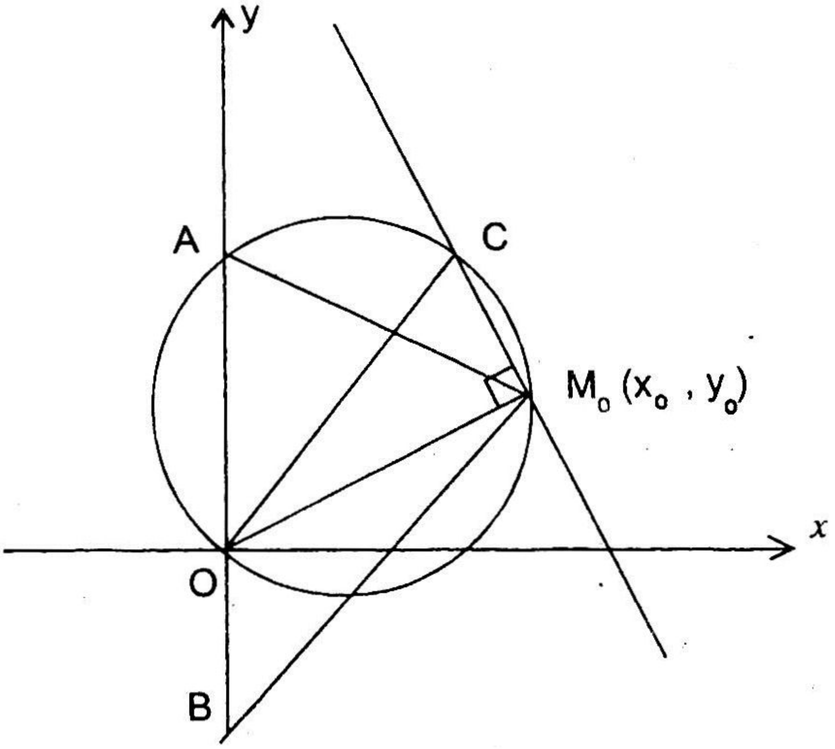
$$2M_oA^2 + 3M_oB^2 = \min_{M \in \Delta}\{2MA^2 + 3MB^2\} \qquad (1)$$

Ta có:

$$2M_oA^2 + 3M_oB^2 = 2\left[x_0^2 + (y_0 - 3)^2\right] + 3\left[x_0^2 + (y_0 + 2)^2\right] =$$

$$= 5\,(x_0^2 + y_0^2) + 30 = 50M_0O^2 + 30 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OM_o = \min_{M \in \Delta} OM \Leftrightarrow OM_o \perp \Delta$



Do OC cố định, suy ra quỹ tích M là đường tròn đường kính OC, với O xác định như trên.

Ví dụ 20. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{29}$$

BÀI GIẢI

Xét hai véc tơ: $\vec{u} = (x - 1, 2)$

$\vec{v} = (-1 - x, 3)$

Khi đó ta có: $\vec{u} + \vec{v} = (-2, 5)$

Ta có: $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{29}$

Vậy phương trình đã cho trở thành : $|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|$ (1)

Từ (1) suy ra chỉ có hai khả năng xảy ra:

1/ Hoặc là có ít nhất một trong hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng $\vec{0}$. Điều này không thể có vì $\forall x$ thì $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ (do thành phần thứ hai của các véc tơ ấy là hằng số $\neq 0$)

2/ Hoặc là $\vec{u}, \vec{v}$ là các véc tơ cùng phương, cùng chiều tức là:

$$\begin{cases} x - 1 = k(-1 - x) & (2) \\ 2 = 3k & (3) \end{cases}$$

với $k > 0$. Từ (3) suy ra $k = \dfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ thay vào (2) có:

$$x - 1 = \frac{2}{3}(-1 - x) \Leftrightarrow 3x - 3 = -2 - 2x.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

* * *

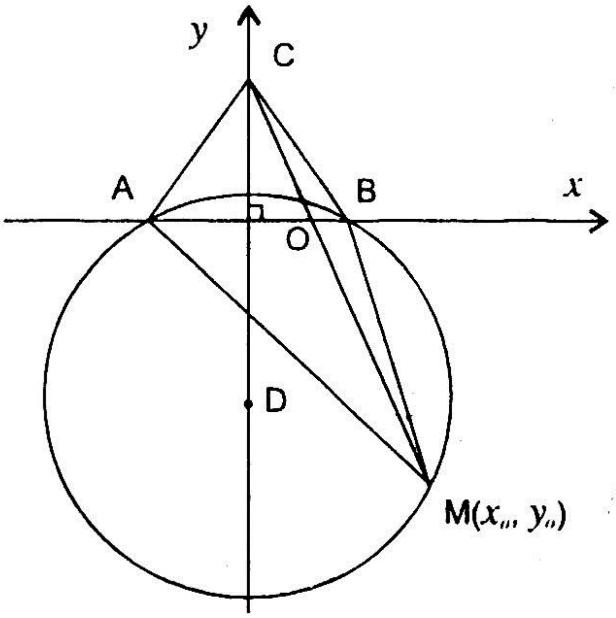
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{5}$

Ví dụ 21. Cho tam giác đều ABC. Gọi D là điểm đối xứng của C qua AB. Vẽ đường tròn tâm D qua A và B, M là điểm bất kỳ trên đường tròn đó (≠ A và ≠ B).

Chứng minh rằng có thể lập được một tam giác vuông bằng ba đoạn MA, MB, MC.

BÀI GIẢI

Xét hệ trục toạ độ với gốc toạ độ O là trung điểm của AB. Trục hoành là đường thẳng nối A; B và có chiều dương hướng từ A sang B .



Giả sử trong hệ toạ độ ấy (và do ABC là Δ đều) nên toạ độ các đỉnh A, B, C là A(-1, 0); B (1,0) và C(0, $\sqrt{3}$). Rõ ràng khi đó toạ độ của D là D(0, -$\sqrt{3}$).

Phương trình đường tròn tâm D và qua A, B là :

$$x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4 \qquad (1)$$

(do DB = DA = 2 là cạnh của tam giác đều).

Giả sử $M(x_o, y_o)$ là điểm bất kỳ trên đường tròn (1). Ta có:

$$MA^2 = (x_o + 1)^2 + y_0^2$$

$$MB^2 = (x_o - 1)^2 + y_0^2$$

$$MC^2 = x_0^2 + (y_o - \sqrt{3})^2$$

Ta có: $MA^2 + MB^2 = 2x_0^2 + 2 + 2y_0^2$

$$= x_0^2 + (y_o - \sqrt{3})^2 + x_0^2 + y_0^2 + 2yo\sqrt{3} - 1$$

$$= MC^2 + x_0^2 + (y_o + \sqrt{3})^2 - 4 \qquad (2)$$

Do (x_o, y_o) nằm trên đường tròn (1) nên:

$$x_0^2 + (y_o + \sqrt{3})^2 - 4 = 0 \Rightarrow MA^2 + MB^2 = MC^2$$

Theo định lý Pitago, suy ra đ. p. c. m..

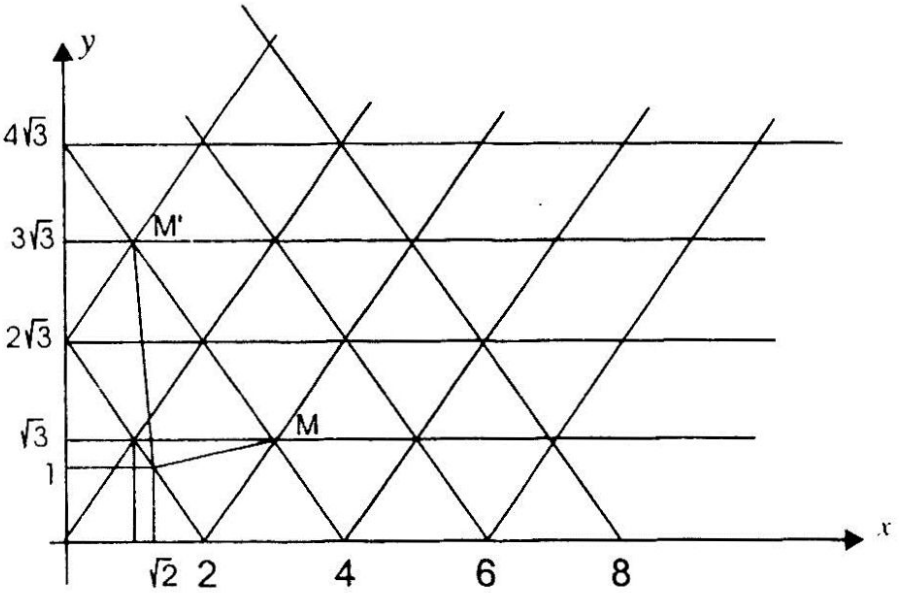
Ví dụ 22. Mặt phẳng được phân chia thành các tam giác đều bằng nhau sao cho hai tam giác bất kỳ không có điểm chung, hoặc chung nhau một đỉnh, hoặc chung nhau một cạnh. Có hay không một hình tròn chứa đúng 1997 đỉnh của các tam giác đó?

BÀI GIẢI

Giả sử các cạnh của tam giác đều ta đặt bằng 2 đơn vị. Chọn trục toạ độ như hình vẽ. Từ giả thiết suy ra một cách dễ dàng rằng: Các đỉnh tam giác trong hệ toạ độ nói trên có dạng $(a, b\sqrt{3})$, trong đó a và b hoặc cùng là số chẵn, hoặc cùng là số lẻ.

Gọi I là điểm có toạ độ $(\sqrt{2}, 1)$. Ta chứng minh rằng khoảng cách từ hai đỉnh khác nhau của tam giác nói trên đến I đều khác nhau.

Thật vậy, xét hai đỉnh bất kỳ $M(a, b\sqrt{3})$ và $M'(a', b'\sqrt{3})$.



$$MI = M'I \Leftrightarrow MI^2 = M'I^2.$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - \sqrt{2})^2 + (b\sqrt{3} - 1)^2 = (a' - \sqrt{2})^2 + (b'\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 3b^2 - a'^2 - 3b'^2 = 2(a - a')\sqrt{2} + 2(b - b')\sqrt{3} \quad (1)$$

Do a, b, a', b' cùng là số nguyên vế trái của (1) là nguyên, và do đó từ (1) suy ra $a - a' = b - b' = 0 \Rightarrow M \equiv M'$.

Nhận xét được chứng minh.

Vì vậy ta đánh số các đỉnh tam giác trên là M_1, M_2, M_3 ... sao cho.

$$M_iI < M_{i+1}I \qquad \forall_i = 1, 2, \ldots$$

Gọi $d_i = M_iI$. Xét hình tròn tâm I, bán kính d_{1997}. Hình tròn ấy chứa đúng 1997 đỉnh của các tam giác nói trên.

Thật vậy các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_{1997}$ nằm trong hình tròn nói trên, vì $M_iI < M_{1997}I \quad \forall_i = \overline{1, 1996}$

Còn M_{1997} nằm trên đường tròn (I, d_{1997}).

Ta có: $M_iI > M_{1997}I \quad \forall_i \geq 1997$, vậy tất cả các đỉnh còn lại của tam giác đều ở ngoài hình tròn nói trên. Vậy có tồn tại hình tròn thoả mãn điều kiện đầu bài.

* * *

§ 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. $\vec{a}.\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}) \text{ nếu } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0 \text{ nếu } \vec{a} = \vec{0} \text{ hoặc } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$

$(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$

2. *Tính chất*: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}$

$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

3. *Biểu thức toạ độ*. Cho $a(x_1, y_1) \neq 0$ và $b(x_2, y_2) \neq 0$.

. $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

. $\text{Cos}(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{x_1.x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

. $(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

. $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$ (vì $|\cos(\vec{a},\vec{b})| \leq 1$)

$\Leftrightarrow \quad |x_1x_2 + y_1y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Hay $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2).(x_2^2 + y_2^2)$. **Đây chính là bất** đẳng thức Bunhiacopski quen thuộc trong đại số.

Đặc biệt: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$

$\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$

$(\vec{a},\vec{b}) > 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} < 0$

$$(\vec{a}, \vec{b}) < 90^{\circ} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} > 0$$

4. Định lý hình chiếu.

Cho hai véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ta có $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{C'D'}$

Trong đó C', D' lần lượt là hình chiếu của C, D trên đường thẳng AB

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ.

Ví dụ 1 *(Định lý Lépnhit)*

Cho tam giác ABC với G là trọng tâm và M là điểm bất kỳ.

Chứng minh công thức sau đây.

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

BÀI GIẢI

Dựa vào tính chất của bình phương vô hướng, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 =$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \qquad (1)$$

Dễ thấy vì G là trọng tâm của tam giác ABC, nên:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$$

Vậy từ (1) suy ra:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \Rightarrow \text{đ. p. c. m..}$$

Chú ý: *Công thức trên mang tên công thức Lepnhit.*

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC với G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{GA}. \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}. \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}. \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

BÀI GIẢI

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

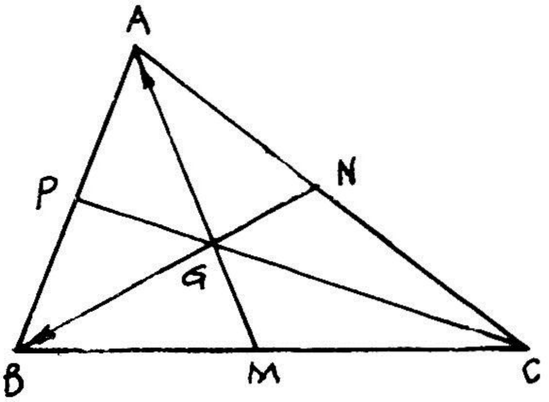
Ta có: $$\overrightarrow{GA}.\,\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA}.\,\frac{2}{3}\overrightarrow{NB} \qquad (1)$$

Do : $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BN}$$

$$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA})$$

$$\overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB})$$



Thay lại vào (1) có: $$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA})\,(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{9}(\overrightarrow{BA}.\,\overrightarrow{CB} - BA^2 + \overrightarrow{CA}.\,\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}.\,\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{9}(\overrightarrow{CA}.\,\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}.\,\overrightarrow{BC} - BA^2) \qquad (2)$$

Lý luận tương tự, có:

$$\overrightarrow{GB}.\,\overrightarrow{GC} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.\,\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}.\,\overrightarrow{CB} - BC^2) \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{GC}.\,\overrightarrow{GA} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{BC}.\,\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}.\,\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC} - CA^2) \qquad (4)$$

Cộng từng vế (2) (3) (4) có:

$$\overrightarrow{GA}.\,\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\,\overrightarrow{GA}$$

$$= \frac{1}{9}(-\,\overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.\,\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}.\,\overrightarrow{CB} - AB^2 - BC^2 - CA^2) \qquad (5)$$

Ta có:

$$-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}[-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}]$$

$$= \frac{1}{2}[(-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}) + (-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}) + (-\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})]$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})]$$

$= \frac{1}{2}(-AB^2 - AC^2 - BC^2)$ (6). Thay (6) vào (5) có:

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

Đó là đ. p. c. m..

Ví dụ 3. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai đường chéo của nó $AC \perp BD$ là : $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$

BÀI GIẢI

Ta có trong mọi tứ giác ABCD:

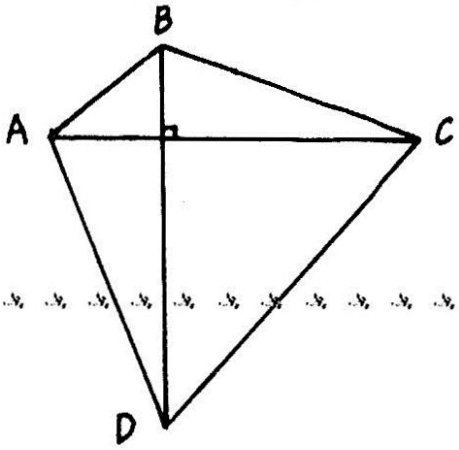
$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$$

$$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})\overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$$

$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$$

$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$



Như vậy trong mọi tứ giác ABCD,

ta có hệ thức sau:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

Như thế : $AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

Đó là đ. p. c. m..

Ví dụ 4. 1/ Cho bốn điểm A, B, C và M tuỳ ý. Chứng minh hệ thức: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$

2/ Áp dụng chứng minh rằng trong một tam giác ba đường cao đồng quy.

BÀI GIẢI

1/ Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} =$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

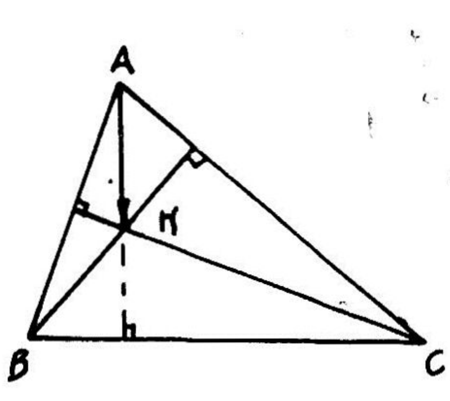
$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} + AC^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \qquad (1)$$

Do : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = 0$

Vậy từ (1) suy ra đ. p. c. m.

2/ Xét tam giác ABC, và giả sử hai đường cao kẻ từ B và C cắt nhau tại H. Áp dụng kết quả phần 1 cho bốn điểm A, B, C, H ta có:



$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (2)

Do $BH \perp CA$ nên $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$

Do $HC \perp AB$ nên $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$

Vậy từ (2) suy ra: $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AH \perp BC$

Vậy trong mọi tam giác ba đường cao đồng quy ⇒ đ. p. c. m..

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a, AC = b, AB=c. Gọi H và O tương ứng là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Giả sử I và J lần lượt là trung điểm của HA, BC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

1/ Chứng minh: OH và IJ có cùng trung điểm.

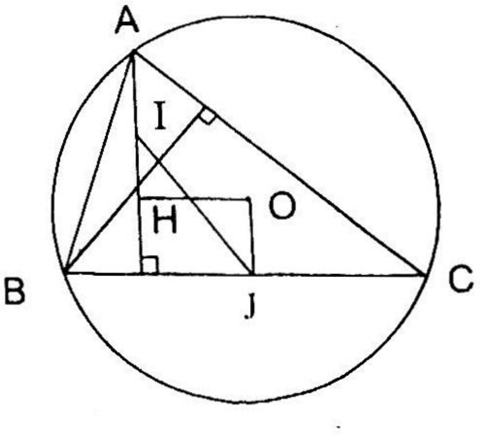
2/ Chứng minh: $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

3/ Chứng minh rằng với mọi vị trí của M thì:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MH^2 + 2MO^2) = \text{const.}$$

4/ Chứng minh công thức sau: $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

BÀI GIẢI



1/ Theo chương 1(xem ví dụ 2) ta có:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{OJ} \qquad (1)$$

Lại có : $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IA}$

Vậy từ (1) suy ra : $2\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IH} + 2\overrightarrow{OJ}$

$$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{IH} = 2\overrightarrow{OJ} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{OJ} \quad (2)$$

Đẳng thức (2) chứng tỏ rằng IHJO là hình bình hành ⇒ OH và IJ có cùng trung điểm ⇒ đ. p. c. m..

2/ Ta có : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$ và theo (*) suy ra: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow \quad AH^2 = OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$$

$$= OB^2 + OC^2 + 2(|\overrightarrow{OB}|.|\overrightarrow{OC}|.\cos BOC$$

$$= 2R^2 + 2R^2\,\frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}}$$

$$= 2R^2 + OB^2 + OC^2 - BC^2$$

hay $AH^2 = 4R^2 - a^2 \Rightarrow$ đ. p. c. m..

3/ Đặt vế trái của công thức là $\sum$ ta có:

$$\sum = (MO + OA)^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OH})^2 - 2MO^2$$

$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}) - OH^2 \qquad (3)$$

Theo (*) suy ra với mọi điểm M ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MH^2 + 2MO^2) = 3R^2 - OH^2 = \text{const}$$

không phụ thuộc vị trí điểm M $\Rightarrow$ đ. p. c. m...

4/ Theo câu 3/ ta có $\forall$ vị trí của M thì:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MH^2 + 2MO^2) = 3R^2 - OH \qquad (4)$$

Trong (4) thay lần lượt M bằng A, B, C, ta có:

$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 - AH^2 - 2AO^2 = 3R^2 - OH^2 \\ BA^2 + BC^2 - BH^2 - 2BO^2 = 3R^2 - OH^2 \\ CA^2 + CB^2 - CH^2 - 2CO^2 = 3R^2 - OH^2 \end{cases}$$

Do OA = OB = OC = R, và cộng từng vế ba đẳng thức trên, ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 15R^2 + AH^2 + BH^2 + CH^2 - 3OH^2 \qquad (5)$$

Theo câu 2/ ta có $AH^2 = 4R^2 - a^2$, tương tự có

$$BH^2 = 4R^2 - b^2$$

$$CH^2 = 4R^2 - c^2$$

$$\Rightarrow \quad AH^2 + BH^2 + CH^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5) có:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 27R^2 - 3OH^2 \text{ hay}$$

$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$. Đó chính là đ. p. c. m..

Ví dụ 6. Chứng minh rằng đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm) của một tam giác thì tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp tam giác đó.

BÀI GIẢI

Gọi H, O, I và ω lần lượt là trực tâm, tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và đường tròn Ơle của tam giác ABC; a, b, c và R, r là độ dài các cạnh và bán kính các đường tròn ngoại và nội tiếp của tam giác đó (chú ý rằng ω là trung điểm của OH). Từ các hệ thức véc tơ quen thuộc:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$$

ta được: $$2p\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \qquad (1)$$

$$2p\overrightarrow{O\omega} = p\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC} \qquad (2)$$

và do đó:

$$\overrightarrow{O\omega} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{I\omega} = \frac{(p - a)}{2p}\overrightarrow{OA} + \frac{(p - b)}{2p}\overrightarrow{OB} + \frac{(p - c)}{2p}\overrightarrow{OC} \qquad (3)$$

* * *

(trong đó $2p = a + b + c$)

Bình phương vô hướng hai vế của (3) ta được:

$$\omega I^2 = d^2 = \frac{(p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2}{4p^2} R^2 -$$

$$- \frac{(p - b)(p - c)}{4p^2}(2R^2 - a^2) -$$

$$- \frac{(p - c)(p - a)}{4p^2}(2R^2 - b^2) - \frac{(p - a)(p - b)}{4p^2}(2R^2 - c^2) =$$

$$= \frac{R^2}{4} - \frac{(p - b)(p - c)a^2 + (p - c)(p - a)b^2 + (p - a)(p - b)c^2}{4p^2} \qquad (4)$$

Sau khi biến đổi (chẳng hạn: $4(p - b)(p - c) = (2p - 2b)(2p - 2c) = (c + a - b)(a + b - c)$) , ta được:

$$(p - b)(p - c)a^2 + (p - c)(p - a)b^2 + (p - a)(p - b)c^2 =$$

$$= \frac{1}{4}[a^4 + b^4 + c^4 - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + 4pabc]$$

$$= \frac{1}{4}(4pabc - 16S^2) = pabc - 4p^2r^2 = 4p^2r(R - r) \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta thu được:

$$\omega I^2 = d^2 = \frac{R^2}{4} - Rr + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$$

Để ý rằng $R \geq 2r$, nên ta được: $d = \omega I = \frac{R}{2} - r$ (6)

hay $d = \omega I = \rho - r$ (6')

(trong đó $\rho = \frac{R}{2}$ là bán kính đường tròn Ơle).

Điều đó chứng tỏ rằng đường tròn Ơle $(\omega, \rho = \frac{R}{2})$ tiếp xúc trong với đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -y(x+z) \\ x^2 + x + y = -2yz \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz = 2x + 4z + 2 \end{cases}$$

BÀI GIẢI

Hệ phương trình đã cho viết lại dưới dạng sau:

$$\begin{cases} x(x+y) + y(y' + z) = 0 & (1) \\ x(x+1) + y(2z+1) = 0 & (2) \\ 4(x+y)^2 + 4(y+z)^2 = (x+1)^2 + (2z+1)^2 & (3) \end{cases}$$

Xét các véc tơ trong một hệ trục toạ độ nào đó.

$$\vec{u} = (x,y); \qquad \vec{v}(x+y,\ y+z);\ \vec{w}(x+1,\ 2z+1)$$

Khi đó hệ (1) (2) (3) có thể viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 0 & (4) \\ \vec{u}.\vec{w} = 0 & (5) \\ 4|\vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2 \quad (6) \ \Leftrightarrow |\vec{w}| = 2|\vec{v}| & (6') \end{cases}$$

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $\vec{u} = \vec{0}$, khi đó x = y = 0 (và dĩ nhiên (4) (5) thoả mãn).

Thay x = y = 0 vào (6), tức là thay vào (3) và có: $4z + 2 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

Trường hợp này cho ta nghiệm $(0; 0; -\frac{1}{2})$.

2. Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$. Do (6') nên suy ra hoặc là $\vec{w}, \vec{v}$ cùng $\neq \vec{0}$, hoặc chúng cùng là véc tơ không.

1) Nếu $\vec{w} = \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = -\dfrac{1}{2} \\ z = x = -y \end{cases}$

Vậy không thể có trường hợp này.

2) Nếu $\vec{w}, \vec{v}$ cùng $\neq \vec{0}$. Khi đó do (4) (5) suy ra $\vec{w}, \vec{v}$ là hai véc tơ cộng tuyến (vì chúng cùng vuông góc với $\vec{u}$).

Từ đó kết hợp với (6') ta có: Hoặc là $\vec{w} = 2\vec{v}$, hoặc là $\vec{w} = -2\vec{v}$.

- Nếu $\vec{w} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2x + 2y \\ 2z + 1 = 2y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = \dfrac{1}{2}$

Thay lại $x = 0, y = \dfrac{1}{2}$ vào (1), có $z = -\dfrac{1}{2}$

Trường hợp này cho ta nghiệm $(0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$

- Nếu $\vec{w} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = -2x - 2y \\ 2z + 1 = -2y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1 - 3x}{2} \\ z = \dfrac{3x}{4} \end{cases}$

Thay vào (1) có: $x^2 + \dfrac{(1 + 3x)^2}{4} = \dfrac{1 + 3x}{2} . \dfrac{7x}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 8x^2 + 2(1 + 3x)^2 = 7x + 21x^2$

$\Leftrightarrow \quad 5x^2 + 5x + 2 = 0$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(0, 0, -\dfrac{1}{2})$ và $(0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$

Ví dụ 8. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x-1} + x - 3 \geq \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$$

BÀI GIẢI

Xét các véc tơ sau:

$$\vec{u} = (\sqrt{x-1}, x - 3)$$

$$\vec{v} = (1, 1), \text{ ở đây } x \geq 1$$

Khi đó: $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{x-1} + x - 3$

Lại có: $|\vec{u}| = \sqrt{(x-3)^2 + x - 1}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$$

Vậy bất phương trình đã cho có dạng: $\vec{u}.\vec{v} \geq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (1)

Do vậy theo tính chất của tích vô hướng, từ (1) suy ra:

$$(1) \Leftrightarrow \quad \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$$

Vậy u, v là hai véc tơ cùng chiều, tức là:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = k \\ x - 3 = k \end{cases} \quad (\text{với } k \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1} = x - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x - 1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 5$

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Ví dụ 9. Cho tám số thực $x_1, x_2, \ldots, x_8$. Chứng minh rằng trong 6 số sau đây: $x_1x_3 + x_2x_4$; $x_1x_5 + x_2x_6$; $x_1x_7 + x_2x_8$; $x_3x_5 + x_4x_6$; $x_3x_7 + x_4x_8$; $x_5x_7 + x_6x_8$ có ít nhất một số không âm.

BÀI GIẢI

Xét hệ trục toạ độ Oxy. Trong hệ trục toạ độ đó xét 4 điểm $A(x_1, x_2)$; $B(x_3, x_4)$; $C(x_5, x_6)$; $D(x_7, x_8)$.

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu có một trong 4 điểm trùng gốc toạ độ, thí dụ $A \equiv O$, thì $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow$ điều kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.

2. Cả 4 điểm không trùng gốc toạ độ.

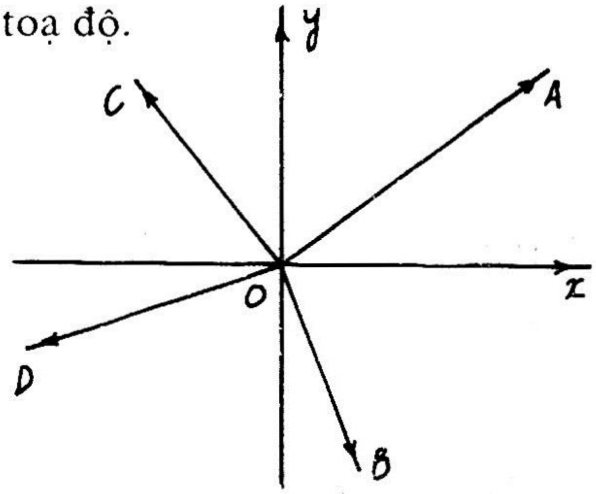
Khi đó, ta có:

$$\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2)$$

$$\overrightarrow{OB} = (x_3, x_4)$$

$$\overrightarrow{OC} = (x_5, x_6)$$

$$\overrightarrow{OD} = (x_7, x_8)$$



(Chú ý rằng hình vẽ bên chỉ có tính chất tượng trưng, còn vị trí các điểm A, B, C, D là tuỳ ý).

Khi đó 6 số đã cho tương ứng với 6 tích vô hướng sau $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$.

Bốn véc tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ chia góc 360° thành 4 góc. Theo nguyên lý Diriclet có ít nhất một góc $\leq 90^\circ$. Áp dụng công thức:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Suy ra ứng với góc $\leq 90^o$, thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0 \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} \geq 0$.

Điều đó có nghĩa là có ít nhất một trong 6 số trên không âm

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 10. 1/ Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

2/ Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC nhọn, ta có:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

3/ Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC và với mọi số x, y, z ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2xz\cos B$$

BÀI GIẢI

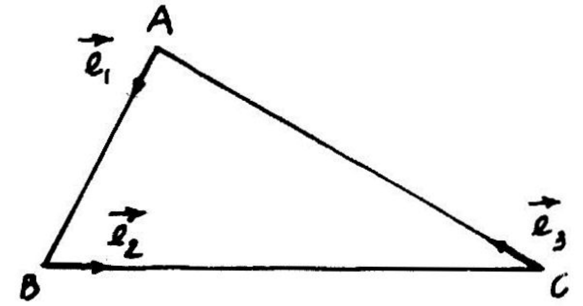
1/ Lấy các véc tơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ như hình vẽ

và có độ dài 1:

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

Hiển nhiên ta có:

$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0$



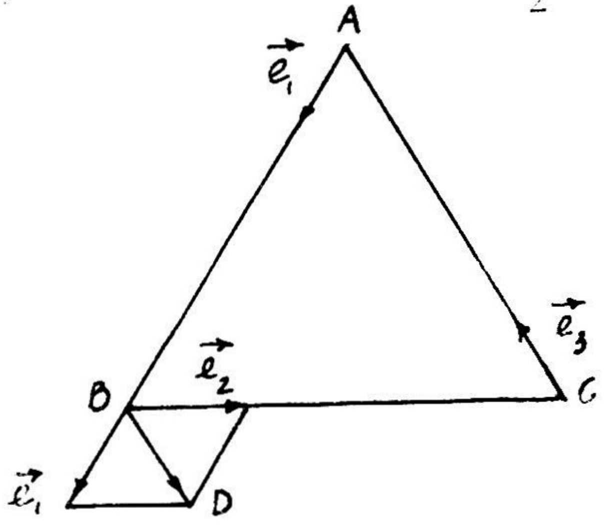
$\Leftrightarrow 3 + 2\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + 2\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \geq 0$ (1)

Chú ý là: $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \cos(180^o - B) = -\cos B$.

Tương tự: $\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = -\cos A$; $\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = -\cos B$.

Thay vào (1) có: $3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2} \Rightarrow \text{đ.p.c.m..}$$



Dấu bằng xảy ra

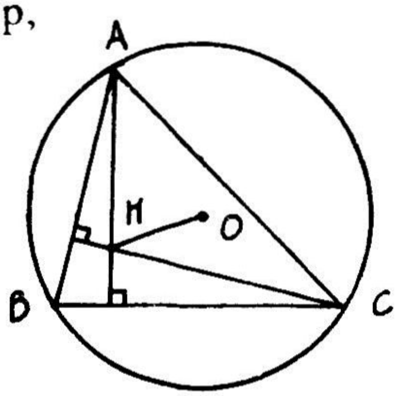
$\Leftrightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

(Chứng minh dễ dàng - xem hình vẽ)

$\overrightarrow{BD} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = -\vec{e}_3$

2/ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Ta có:



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

Hiển nhiên có :

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3R^2 + 2R^2[\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) + \cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) + \cos(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3R^2 + 2R^2(\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{đ.p.c.m..}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OH} = \vec{O} \quad \Leftrightarrow \quad H \equiv O$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

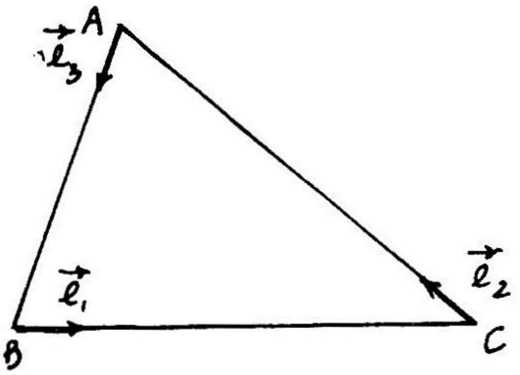
3/ Lấy các véc tơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ như hình vẽ và có độ dài là *1*:

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1.$$

Trên mỗi đường thẳng BC, CA, AB lấy B, C, A làm gốc và có chiều dương tương ứng từ B đến C, C đến A, A đến B.

Trên BC lấy điểm X sao cho $\overrightarrow{BX} = (x)$, trên CA lấy điểm Y sao cho $\overrightarrow{CY} = (y)$, và trên AB lấy điểm Z sao cho $\overrightarrow{AZ} = (z)$, như vậy:

$\overrightarrow{BX} = x\vec{e_1}$, $\overrightarrow{CY} = y\vec{e_2}$, $\overrightarrow{AZ} = z\vec{e_3}$.



Hiển nhiên ta có : $(\overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{AZ})^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2yz\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + 2zx\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy.\cos C - 2yz\cos A - 2xz\cos B \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2xz\cos B$$

$\Rightarrow$ đ. p. c. m..

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ và ABC là tam giác đều.

Ví dụ 11. *(Hai quỹ tích cơ bản)*

1. Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$$

2. Cho điểm A cố định, và véc tơ $\vec{a}$ cố định, k là số cho trước. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho: $\overrightarrow{AM}.\vec{a} = k$

BÀI GIẢI

1. Trước hết ta sử dụng công thức sau: Với mọi ba điểm A, B, C ta luôn có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) \qquad (1)$$

Thật vậy:

$$AB^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})^2 = MB^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}.$$

từ đó suy ra (1).

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$= \quad 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

(do $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$ và $IA^2 = IB^2 = \frac{AB^2}{4}$)

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(2MI^2 + \frac{AB^2}{2} - AB^2) = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra

. Nếu $k < -\frac{AB^2}{4}$ thì quỹ tích M là tập trống.

. Nếu $k = -\frac{AB^2}{4}$ thì quỹ tích M là tập gồm điểm I duy nhất.

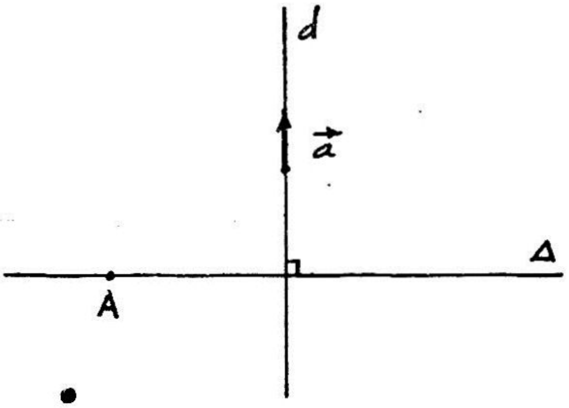
. Nếu $k > -\frac{AB^2}{4}$ thì quỹ tích M là đường tròn tâm I, bán kính

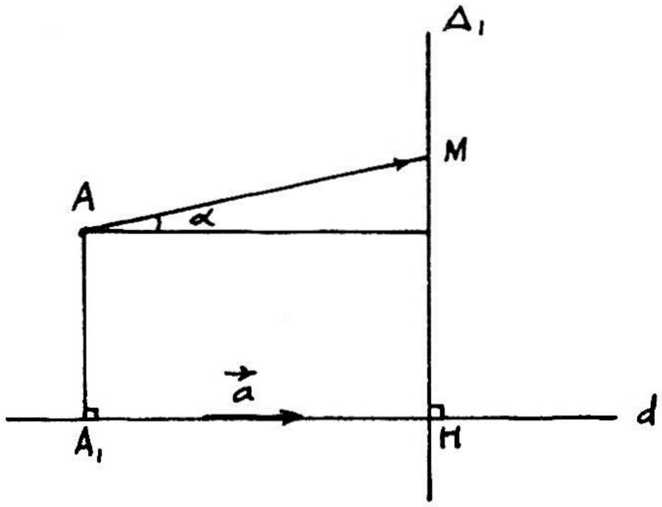
$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4k + AB^2}.$$

2/ Xét hai khả năng sau:

. Nếu k = 0 thì $\overrightarrow{MA}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \vec{a}$

Quỹ tích M là đường thẳng (Δ) qua A và vuông góc với đường thẳng d chứa $\vec{a}$.





. Nếu k ≠ 0:

Giả sử $\overrightarrow{AM}.\vec{a} = k$. Gọi A_1 và H là các hình chiếu tương ứng của A, M lên d (d là đường thẳng chứa a). Khi đó A_1 cố định.

Ta có: $\overrightarrow{AM}.\vec{a} = |\overrightarrow{AM}|.|\vec{a}|.\cos(\overrightarrow{AM},\vec{a})$

$$= \overrightarrow{AM}\cos\alpha\,|\vec{a}| = A_1H.|\vec{a}|.$$

Từ giả thiết suy ra $A_1H.|\vec{a}| = k$, hay $A_1H = \dfrac{k}{|\vec{a}|}$ (*)

Do A_1 cố định và vế phải của (*) là hằng số ⇒ H cố định.

Vậy quỹ tích của M là đường thẳng $\Delta_1 \perp d$ tại điểm $H \in d$, trong đó H được xác định duy nhất nhờ (*).

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC. Tìm quĩ tích M nếu như thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

1/ $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = AB^2$ (G là trọng tâm tam giác)

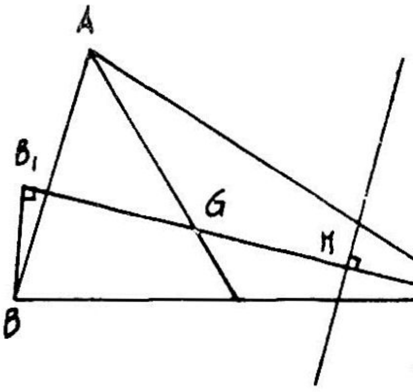
2/ $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0$

3/ $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = BC^2$

4/ $MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

5/ $2MA^2 + MB^2 = 2MC^2$

BÀI GIẢI



1. Ta có:

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = AB^2$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) - AB^2$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} = AB^2 \qquad (1)$

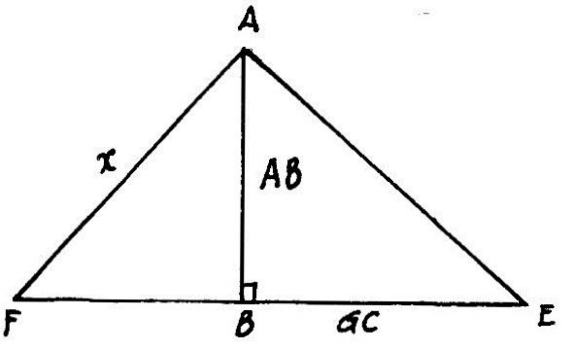
Gọi B_1 là hình chiếu của B lên GC.

Gọi H là điểm xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{B_1H} = \frac{AB^2}{GC} \qquad (*)$$

$$\text{Đặt} \quad x = \frac{AB^2}{GC} \quad \Leftrightarrow \quad x.GC = AB^2 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra cách dựng x như sau (xem hình vẽ dưới đây)



BE = GC

AB ⊥ FBE

AF ⊥ AE

Khi đó x = AF

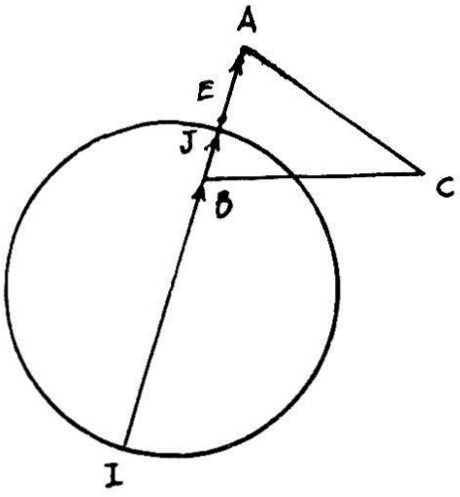
Lấy B_1 làm tâm quay đường tròn bán kính, cắt GC tại H; do $AB^2 > 0$ nên từ (*) suy ra $\overrightarrow{B_1H}$ và $\overrightarrow{GC}$ cùng chiều.

Quĩ tích của M (theo phần 2 ví dụ 11) là đường thẳng vuông góc với GC tại điểm H nói trên.

2. Gọi I là tâm tỉ cự của A, B theo bộ số (2, -3). Ta có:

$$2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IB}$$



Gọi J là tâm tỉ cự của A, B theo bội số (1, 2), ta có:

$$\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JB} = 0$$

(ở đây E là trung điểm của AB)

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{JE}$$

Vậy J nằm trên AB sao cho $BJ = \frac{2}{3}BE = \frac{1}{3}BA$. Còn I nằm trên AB kéo dài về phía B sao cho BI = 2AB. Theo tính của tâm tỉ cự thì:

$$(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\overrightarrow{MI} \,.\, 3\overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MI} \,.\, \overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MJ$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{MIJ} = 90^\circ$$

Vậy quĩ tích M là đường tròn đường kính IJ.

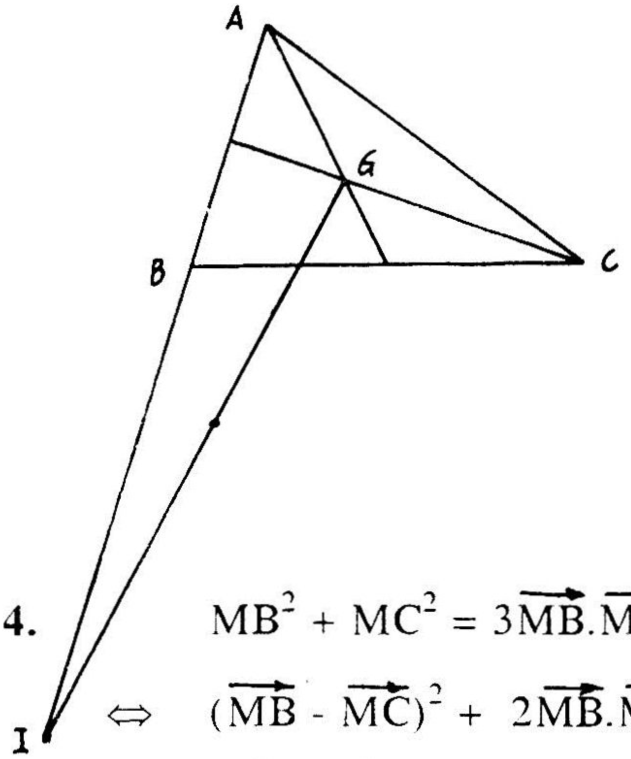
3. Kí hiệu I như trong phần **2**, ta có:

$$(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = BC^2$$

$\Leftrightarrow \quad -\overrightarrow{MI} \,.\, 3\overrightarrow{MG} = BC^2$; ở đây G là trọng tâm Δ ABC

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MI} \,.\, \overrightarrow{MG} = -\frac{BC^2}{3}$$

Áp dụng ví dụ 11, với $k = -\frac{BC^2}{3}$, $A \equiv I$, $B \equiv G$. Khi đó tuỳ thuộc vào dấu đại lượng :



$$\delta = \frac{GI^2}{4} - \frac{BC^2}{3}$$

nên ta có quỹ tích của M là :

* Tập trống nếu $\delta < 0$

* Trung điểm F của GI nếu $\delta = 0$

* Đường tròn tâm F, bán kính $\sqrt{\delta}$ nếu $\delta > 0$.

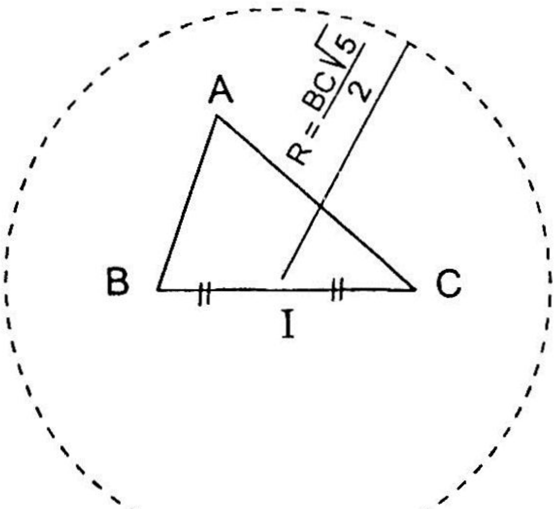
4. $MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} = BC^2$

Áp dụng ví dụ 11 phần 1, với $k = BC^2$, ta có đại lượng:

$$\delta = BC^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{5BC^2}{4} > 0$$



Do đó quỹ tích M là đường tròn tâm là trung điểm của BC và bán kính là $\frac{BC\sqrt{5}}{2}$

5. Gọi I là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo bộ số 2, 1, -2, tức là:

$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IB} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{AC}$

Ta có: $2MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\,(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}) + 2IA^2 + IB^2 - 2IC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad MI^2 + 2IA^2 + IB^2 - 2IC^2 = 0$$

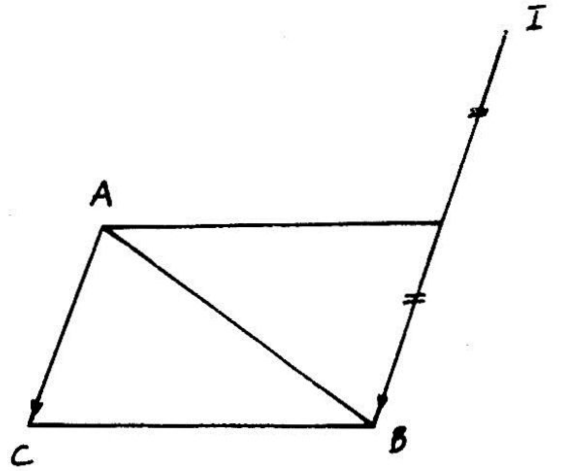
$$\Leftrightarrow \quad MI^2 = 2IC^2 - 2IA^2 - IB^2$$

Đặt $\delta = 2IC^2 - 2IA^2 - IB^2$

. Nếu $\delta < 0$: Quĩ tích M là tập trống.

. Nếu $\delta = 0$: Quĩ tích M gồm điểm I duy nhất.

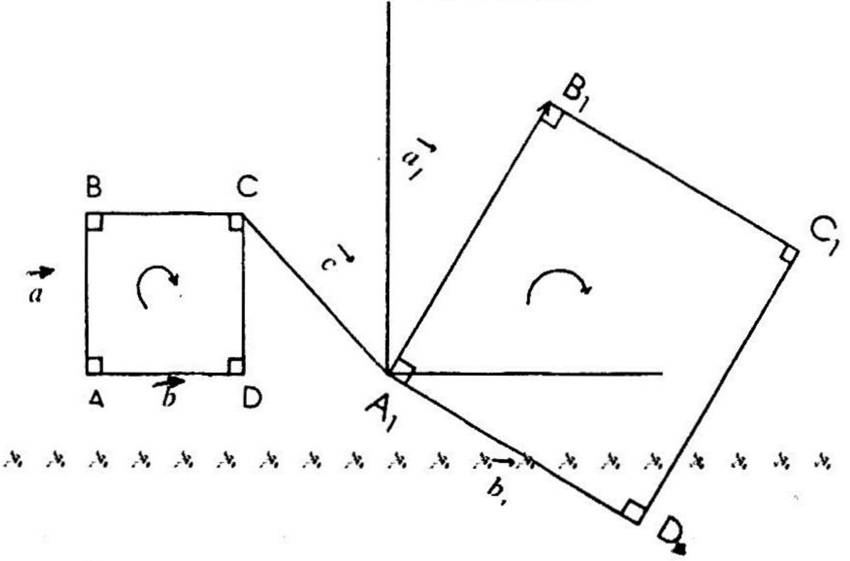
. Nếu $\delta > 0$: Quĩ tích M là đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{\delta}$.



Ví dụ 13. Trên mặt phẳng cho hai hình vuông cùng hướng ABCD và $A_1B_1C_1D_1$.

Chứng minh rằng $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$

BÀI GIẢI.



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = b$. $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}_1$, $\overrightarrow{CA_1} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \vec{a_1} + \vec{b_1} + \vec{c}$

Tương tự có $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a_1} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{a} + \vec{b_1} + \vec{c}$

Ta lại có: $AA_1^2 + CC_1^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 + (\vec{a_1} + \vec{b_1} + \vec{c})^2 =$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{a_1}^2 + \vec{b_1}^2 + 2\vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{a_1}.\vec{c} + 2\vec{b_1}.\vec{c} \qquad (1)$$

(Do $\vec{a} \perp \vec{b}$ và $\vec{a_1} \perp \vec{b_1}$ nên $\vec{a} . \vec{b} = \vec{a_1} . \vec{b_1} = 0$).

Tương tự, có: $BB_1^2 + DD_1^2 = (\vec{a_1} + \vec{b} + \vec{c})^2 + (\vec{a} + \vec{b_1} + \vec{c})^2 =$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{a_1}^2 + \vec{b_1}^2 + 2\vec{c}^2 + 2\vec{a_1}.\vec{b} + 2\vec{a_1}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{a_1}.\vec{b_1} + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b_1}.\vec{c} \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2 \Leftrightarrow \vec{a_1} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{b_1} = 0 \qquad (3)$$

Do giả thiết ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ là hai hình vuông cùng hướng nên dễ thấy :

$$(\vec{a_1}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{b_1}) = 180^0$$

Do $\vec{a_1} . \vec{b} = |\vec{a_1}|\,|\vec{b_1}|. \cos(\vec{a_1}, \vec{b})$

$(\vec{a} . \vec{b_1}) = |\vec{a}|\,|\vec{b_1}|. \cos(\vec{a}, \vec{b_1})$

và vì $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; $|\vec{a_1}| = |\vec{b_1}|$; $\cos(\vec{a_1}, \vec{b}) = -\cos(\vec{a}, \vec{b_1})$

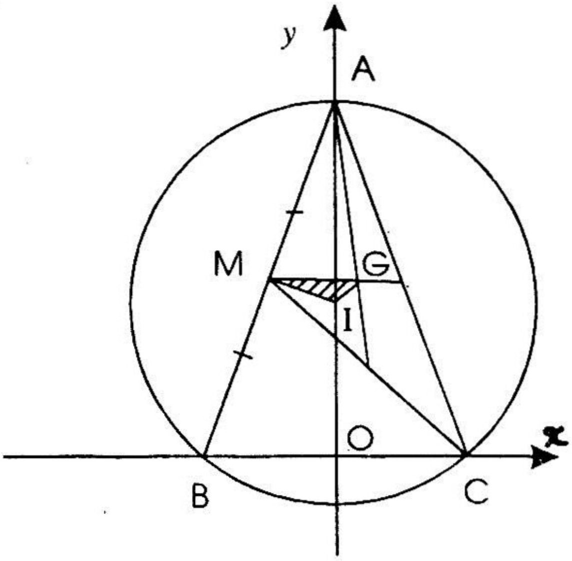
$\Rightarrow \vec{a_1} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{b_1} = 0$; Vậy (3) đúng và đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 14. Cho tam giác cân ABC đỉnh A. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm của tam giác ACM. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ABC. Chứng minh GI $\perp$ CM.

BÀI GIẢI

Gọi O là trung điểm của BC. Dựng hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ sau. Trong hệ trục này các điểm A, B, C có toạ độ A (O, h) ;

B(-a , 0) ; C (a . 0) . (Ở đây giả sử cạnh đáy BC = 2a và chiều cao OA = h).



Theo hệ thức Sáclơ, ta có toạ độ của M là $M\left(-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)$

Áp dụng công thức tính toạ độ trọng tâm tam giác, ta được :

$$x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_M + x_C) = \frac{a}{6}$$

$$y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_M + y_C) = \frac{h}{2}$$

Vậy toạ độ của G là : $G\left(\frac{a}{6},\frac{h}{2}\right)$.

Tọa độ I là : $I\,(O, y_0) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(-\frac{a}{2},\frac{h}{2} - y_0\right)$

Do $\overrightarrow{IM}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{2}.a + \left(\frac{h}{2} - y_0\right)h = 0$

$$\Leftrightarrow y_o = \frac{h^2 - a^2}{2h}.$$

Vậy toạ độ của I là : $I\left(O\ ,\ \frac{h^2 - a^2}{2h}\right)$;

$$\Rightarrow \overrightarrow{IG} = \left(\frac{a}{6}\ ,\ \frac{h}{2} - \frac{h^2 - a^2}{2h}\right) = \left(\frac{a}{6}\ ,\ \frac{a^2}{2h}\right)$$

* * *

Ta có: $\overrightarrow{CM} = \left(-\frac{a}{2} - a\ ,\ \frac{h}{2}\right) = \left(\frac{-3a}{2}\ ,\ \frac{h}{2}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{IG}\,.\,\overrightarrow{CM} = -\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} = 0 \Rightarrow IG \perp CM \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Chú ý: *Cách giải trên không phân biệt tam giác là nhọn, vuông hay tù. Nếu giải bằng phương pháp hình học thuần tuý, thì khi vẽ hình phải xét 3 trường hợp trên. Lợi thế của phương pháp toạ độ là ở chỗ đó.*

Ví dụ 15. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BK $\perp$ AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD.

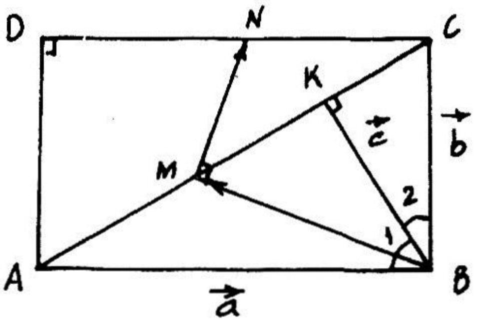
a) Chứng minh : $\widehat{BMN} = 90^0$

b) Tìm điều kiện của hình chữ nhật để tam giác BMN vuông cân.

LỜI GIẢI

a) Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BK} = \vec{c}$

và BA = a ; BC = b ; CK = c



Ta có: $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

$= -\dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + \dfrac{\vec{a}}{2} = \vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}(\vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{c})(\vec{a} + \vec{c})$

$= \dfrac{1}{4}(2\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} - c^2) = \dfrac{1}{4}[2\vec{a}\vec{b} + (\vec{b} - \vec{a})\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c})\vec{c}]$

Vì $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$; $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = 0$; $(\vec{b} - \vec{c})\vec{c} = 0$ nên $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0$

Suy ra: $\widehat{BMN} = 90^0$.

b) Ta có : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow BM^2 = MN^2$

$\Leftrightarrow |\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})|^2 = (\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c})^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2\vec{a}.\vec{c} = 4\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + - 4\vec{b}.\vec{c}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ac\cos B_1 = 4b^2 - 4bc\cos B_2$

$\Leftrightarrow a^2 + 2c(a\cos B_1) = 4b^2 - 4c.(b\cos B_2)$

$\Leftrightarrow a^2 + 2c^2 = 4b^2 - 4c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 6c^2 - 4b^2 = 0$ (1). Vì $ab = AC.c$ nên:

$\Leftrightarrow a^2b^2 = AC^2c^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$, thay vào (1) ta được :

$a^2 + \frac{6a^2b^2}{a^2 + b^2} - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow a^4 + a^2b^2 + 6a^2b^2 - 4a^2b^2 - 4b^4 = 0$

$\Leftrightarrow a^4 + 3a^2b^2 - 4b^4 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + 4b^2) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0$ (vì $a^2 + 4b^2 \neq 0$) $\Leftrightarrow a = b$

Vậy điều kiện cần và đủ để ΔBMN vuông cân là ABCD là hình vuông.

Ví dụ 16. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo cắt nhau tại M. Qua trung điểm P của cạnh AB kẻ đường thẳng PM, qua trung điểm Q của cạnh BC kẻ đường thẳng QM.

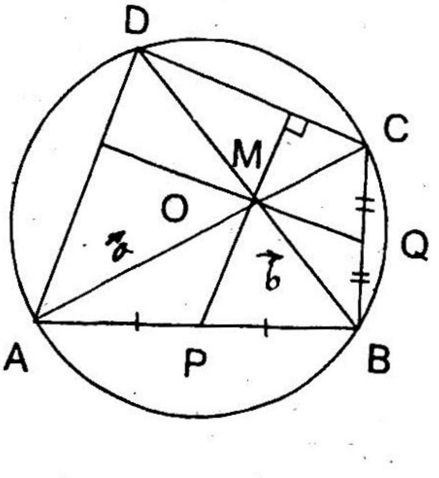
Chứng minh rằng: Nếu PM ⊥ CD thì QM ⊥ AD.

LỜI GIẢI

Ký hiệu: $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, và $MA = a$, $MB = b$

Trước hết nhận xét Δ MAB ~ Δ MDC

nên: $\frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB}$ (= k) ta có:



$$MD = kMA\ ,\ MC = kMB$$

Do đó: $\overrightarrow{CM} = \frac{\vec{a}}{a}\, kb$

$$\overrightarrow{MD} = -\frac{\vec{b}}{b}\, ka$$

Mặt khác: $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$, vì vậy $\overrightarrow{CD} = \frac{k}{ab}\,(b^2\vec{a} - a^2\vec{b})$

Theo giả thiết $PM \perp CD \Rightarrow \overrightarrow{MP}\,.\,\overrightarrow{CD} = 0$ mà

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MP}$ nên $(\vec{a} + \vec{b})\ \ (b^2\vec{a} - a^2\vec{b}) = 0$

$$\Rightarrow \quad (b^2 - a^2)\,.\,\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$

. Nếu $b^2 - a^2 = 0$ hay a = b thì ABCD là hình thang cân hoặc là hình chữ nhật. Dễ dàng thấy thoả mãn điều kiện đầu bài.

. Nếu $\vec{a} \perp \vec{b}$ thì $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$. Khi đó $AC \perp BD$. Ta lại có :

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OM} \qquad \text{nên}$$

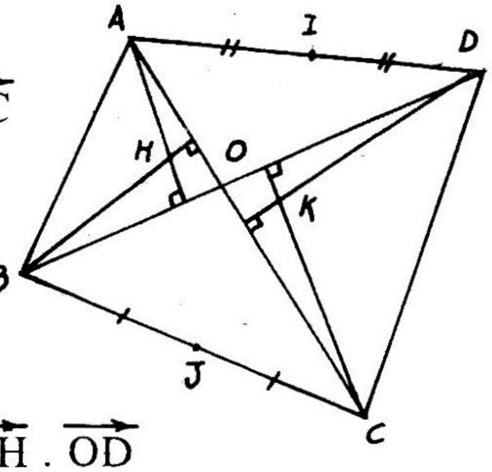
$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$\overrightarrow{QM}\,.\,\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})\,(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\,(OD^2 - OA^2) = 0$$

$QM \perp AD \qquad \Rightarrow \qquad$ **đ.p.c.m..**

Ví dụ 17. Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J là trung điểm của AD, BC. Chứng minh : $HK \perp IJ$.

BÀI GIẢI



$\overrightarrow{HK}\,.\,\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

$= \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{OK}\,.\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH}\,.\,\overrightarrow{DC}$

(vì OK ⊥ DC và OH ⊥ AB)

$= \overrightarrow{OK}\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OH}\,(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})$

$= \overrightarrow{OK}\,.\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK}\,.\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}\,.\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}\,.\,\overrightarrow{OD}$

$= (\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CK})\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DK})\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH})\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH})\overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK}\,.\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.\,\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DK}\,.\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} -$

$- \overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD} = 0$

(vì CK ⊥ OB , DK ⊥ OA , BH ⊥ OC , AH ⊥ OD)

Từ đó suy ra HK ⊥ IJ . Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 18. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R.

a/ Chứng minh : $M \in (O) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

b/ Đặt $S = MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2$. Chứng minh:

$$S = 2\overrightarrow{MO}\,(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC})$$

c/ Tìm trên đường tròn điểm M sao cho S lớn nhất, nhỏ nhất và hãy tính các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

BÀI GIẢI

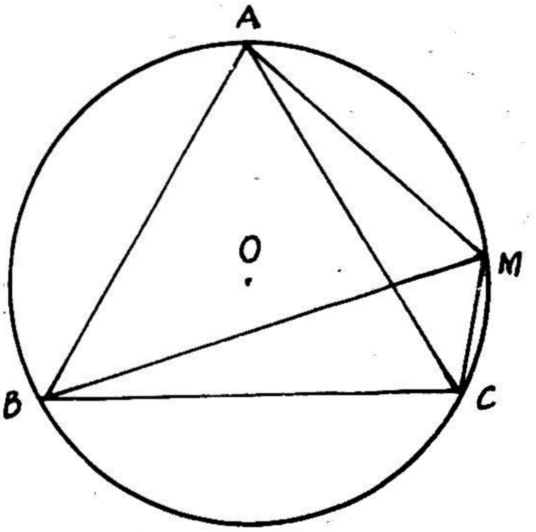
a) Ta có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

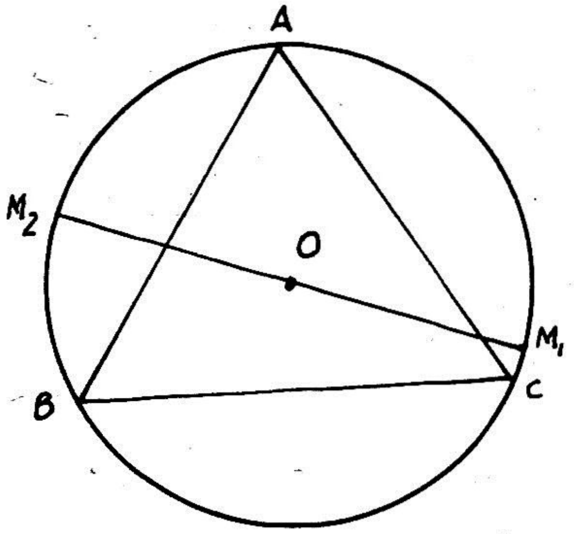
$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = 6R^2$

$\Leftrightarrow \quad 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = 6R^2$

$\Leftrightarrow \quad 3MO^2 + 3R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow OM^2 = R^2 \Leftrightarrow OM = R$

$\Leftrightarrow$ M $\in$ đường tròn (O).





b) Ta có: $S = OA^2 + 2OB^2 - 3OC^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}) =$

$= 2\overrightarrow{MO}\,(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC})$

c) Ta có : $S = 2R.\,|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}|.\cos\alpha$ (α là góc tạo bởi $\overrightarrow{MO}$ và véctơ $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$).

$\Rightarrow \quad -2R\,|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}| \le T \le 2R.\,|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}|$

trong đó : $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$

$= \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB})^2 = CA^2 + 4CB^2 + 4\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 5CA^2 + 2CA^2 = 7CA^2$

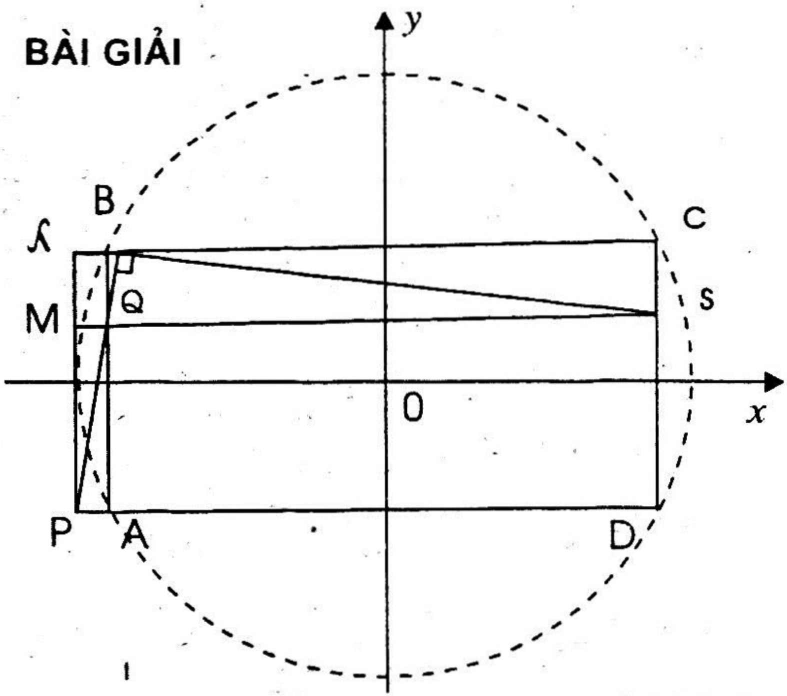
$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}| = R.\sqrt{21}$

$\Rightarrow \quad S_{max} = 2R^2\sqrt{21}$. Giá trị đó đạt được khi $\overrightarrow{MO}$ song song và cùng chiều với véc tơ $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

⇒ $S_{min} = -2R^2\sqrt{21}$. Giá trị đó đạt được khi $\overrightarrow{MO}$ song song và ngược chiều với véc tơ $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Ví dụ 19. Trên $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R, S là hình chiếu của M trên các đường thẳng AD, AB, BC, CD. Chứng minh rằng PQ ⊥ RS và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo của hình chữ nhật.

BÀI GIẢI



Gọi O là tâm của hình chữ nhật (tức cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật). Dựng hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ (trục hoành Ox // AD, còn trục tung Oy // AB). Giả sử bán kính đường tròn là R.

Trong hệ trục toạ độ ấy giả sử toạ độ các đỉnh A, B, C, D của hình chữ nhật là A(-a, -b); B(-a, b); C(a, b); D(a, -b), ở đây $a > 0$, $b > 0$

Rõ ràng ta có: $a^2 + b^2 = R^2$ (1)

Giả sử M (x_o, y_o) là điểm bất kỳ thuộc AB. Khi đó từ giả thiết ta có: $x_0^2 + y_0^2 = R^2$ (2)

Ta có ngay toạ độ các hình chiếu P, Q, R, S là:

$$P(x_0, -b)\ ;\ Q(-a, y_o)\ ;\ R(x_o, b)\ ;\ S(a, y_o)$$

Vậy suy ra: $\overrightarrow{PQ} = (-a - x_o\ ;\ y_o + b)$ và $\overrightarrow{RS} = (a - x_o\ ;\ y_o - b)$

Ta có: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = -(a^2 - x_0^2) + (y_0^2 - b^2) = (x_0^2 + y_0^2) - (a^2 + b^2)$

Từ (1), (2) suy ra: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$ hay $PQ \perp RS$. Đó là đ.p.c.m..

Đường thẳng PQ có phương trình :

$$\frac{x + a}{x_0 + a} = \frac{y - y_0}{-b - y_0}$$

hay $$(b + y_0)x + (a + x_0)y - x_0y_0 + ab = 0 \quad (3)$$

Đường thẳng RS có phương trình :

$$\frac{x - a}{x_0 - a} = \frac{y - y_0}{b - y_0}$$

hay $$(b - y_0)x + (a - x_0)y - x_0y_0 - ab = 0 \quad (4)$$

Gọi I (x^*, y^*) là giao điểm của PQ và RS, thì ta có:

$$\begin{cases}(b - y_0)x^* + (a + x_0)y^* - x_0y_0 + ab = 0 & (5)\\ (b - y_0)x^* + (a - x_0)y^* - x_0y_0 - ab = 0 & (6)\end{cases}$$

Từ hệ đẳng thức (5), (6) suy ra bằng cách cộng hai vế, ta có :

$$bx^* + ay^* = 0 \quad (7)$$

Đường chéo BD của hình chữ nhật có dạng :

$$bx + ay = 0$$

Đẳng thức (7) chứng tỏ rằng $I \in BD$, và đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 20. Cho tứ giác ABCD có các cạnh là a_1, a_2, a_3, a_4 các đường chéo là m, n.

a) Chứng minh : $a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 > \frac{1}{3} a^2_4$

b) Chứng minh: $a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 \geq m^2 + n^2$.

BÀI GIẢI

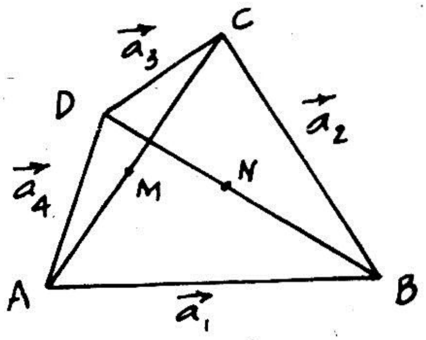
a/ Ký hiệu các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}$ lần lượt là $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ ta có : $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$ hay $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = -\vec{a}_4$.

Bình phương vô hướng hai vế:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)^2 = a^2_4 \Leftrightarrow a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + 2(\vec{a}_1\vec{a}_2 + \vec{a}_2\vec{a}_3 + \vec{a}_3\vec{a}_1) = a^2_4$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2_1 + a^2_2 + a^2_3) = a^2_4 + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 + (\vec{a}_1 - \vec{a}_3)^2 + (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)^2 > a^2_4$$

$\Rightarrow$ Đó là đ.p.c.m..



b/ Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của AC, BD, ta có:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

Bình phương vô hướng hai vế:

$$4MN^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})^2 + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$$
$$= AB^2 + CD^2 + 2(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC})$$

Thay: $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} = OB^2 + OD^2 - BD^2$

$2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = OB^2 + OC^2 - BC^2$

$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = OA^2 + OC^2 - AC^2$

Từ đó suy ra : $a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 - m^2 - n^2 = 4MN^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv N$ tức ABCD là hình bình hành.

* * *

Ví dụ 21. Chứng minh rằng nếu : $\alpha^2 + \beta^2 = u^2 + v^2 = 1$ và $\alpha u + \beta v = 0$, thì ta cũng có:

$$\alpha^2 + u^2 = \beta^2 + v^2 = 1 \text{ và } \alpha\beta + uv = 0.$$

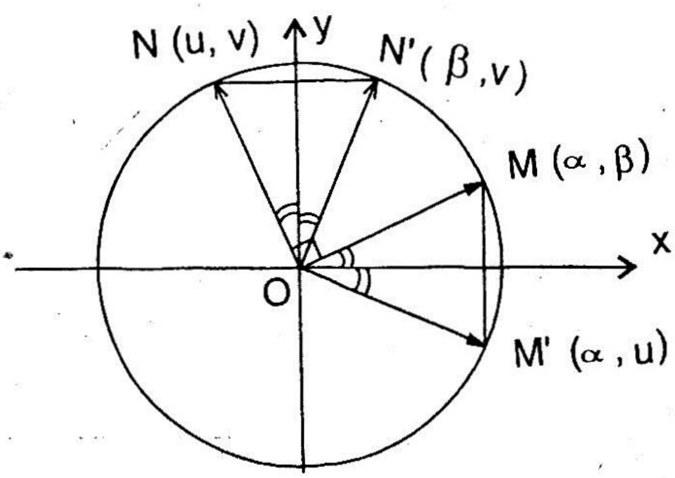
BÀI GIẢI

Xét hệ trục toạ độ xOy và xét đường tròn đơn vị : $x^2 + y^2 = 1$

Xét các điểm $M(\alpha, \beta)$ và $N(u, v)$, với α, β, u, v thoả mãn hệ điều kiện :

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = u^2 + v^2 = 1 & (1) \\ \alpha u + \beta v = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra : hai điểm M. N đều thuộc đường tròn đơn vị.



Ta có :

$\overrightarrow{OM} = (\alpha, \beta)$ và $\overrightarrow{ON} = (u, v)$

Vậy:

$\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{ON} = \alpha u + \beta v = 0$

(theo (2)), do đó $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$

Không giảm tổng quát ta có thể giả sử M thuộc góc phần tư thứ I (vì nếu không lý luận hoàn toàn tương tự). Do $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$ nên chỉ có hai khả năng :

1. Nếu N (u, v) thuộc cung phần tư thứ II, tức là: $\alpha = v$, $\beta = -u$

Xét điểm $M'(\alpha, u)$ và $N'(\beta, v)$. Khi đó thì M'; là điểm đối xứng của M qua Ox, còn N' là điểm đối xứng của N qua Oy.

Vì M', N' $\in$ đường tròn đơn vị và rõ ràng $OM' \perp ON'$, nên ta có:

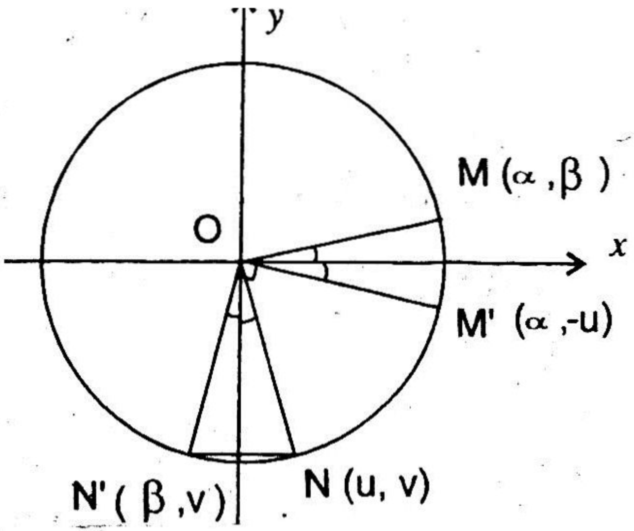
$$\begin{cases} \alpha^2 + u^2 = \beta^2 + v^2 = 1 \ (1) \\ \alpha u + \beta v = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Và đó là đ.p.c.m..

2. Nếu N(u, v) thuộc cùng phần tử thứ IV, tức là $\alpha = -v$, $\beta = u$.

Xét điểm M' $(-\alpha, u)$ và N'$(-\beta, v)$.

Rõ là M' và N' đối xứng với nhau qua Ox, còn N và N' đối xứng nhau qua Oy.



Do $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{ON'}$, vậy cũng có:

$$\begin{cases} \alpha^2 + u^2 = \beta^2 + v^2 = 1 \\ -\alpha\beta - uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + u^2 = \beta^2 + v^2 = 1 \\ \alpha\beta + uv = 0 \end{cases}$$

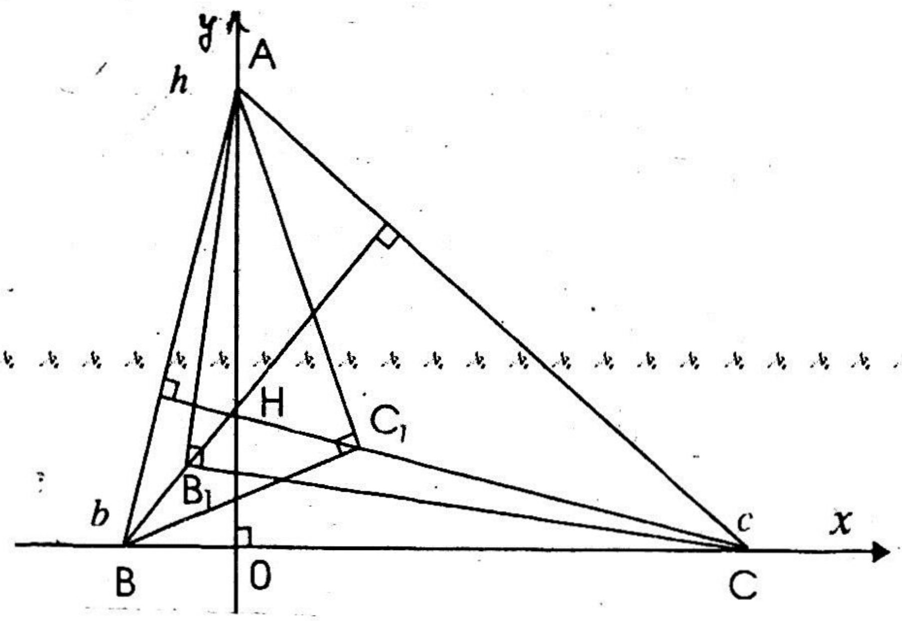
Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 22. Các đường cao của tam giác nhọn ABC cắt nhau ở H. Trên đoạn HB, HC lấy B_1, C_1 sao cho $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^0$.

Chứng minh rằng $AB_1 = AC_1$

BÀI GIẢI

Gọi O là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Xét hệ trục toạ độ xOy như hình vẽ sau:



Giả sử trong hệ toạ độ ấy các đỉnh A, B, C của tam giác có toạ độ $A(0, h)$; $B(b, 0)$; $C(c, 0)$ ở đây $b < 0$, $c > 0$, $h > 0$.

Ta có $h^2 > |b|c$ (do ABC là tam giác nhọn).

Dễ thấy $\overrightarrow{AC} = (c, -h)$. Vì $BH \perp AC$ mà toạ độ của B là $B(b, 0)$, nên đường cao BH có phương trình:

$$c(x - b) - hy = 0 \qquad (1)$$

Gọi toạ độ của điểm B_1 là $B_1(x_1, y_1)$.

Do $B_1 \in$ đường cao BH, nên ta có:

$$cx_1 - hy_1 - bc = 0 \qquad (2)$$

Ta có: $\overrightarrow{AB_1} = (x_1, y_1 - h)$ và $\overrightarrow{CB_1} = (x_1 - c, y_1)$.

Vì $\widehat{AB_1C} = 90^\circ$, nên ta có: $\overrightarrow{AB_1}.\ \overrightarrow{CB_1} = 0$

hay $\quad x_1(x_1 - c) + y_1(y_1 - h) = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 - y_1h - cx_1 = 0 \qquad (3)$$

Ta có: $AB_1^2 = x_1^2 + (y_1 - h)^2 = x_1^2 + y_1^2 + h^2 - 2y_1h =$

$$(x_1^2 + y_1^2 - y_1h - cx_1) + cx_1 - y_1h + h^2 \qquad (4)$$

Thay (2), (3) vào (4), ta có: $\quad AB_1^2 = bc + h^2 \qquad (5)$

Do vai trò bình đẳng, ta cũng có: $\quad AC_1^2 = cb + h^2 \qquad (6)$

Từ (5) và (6) suy ra: $AB_1 = AC_1$. Đó là đ.p.c.m..

(***Chú ý***: *Do* $h^2 > |b|c \ \Rightarrow \ h^2 + bc > 0$).

Chương II

HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

§1. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hàm số lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt.

a) Cho $0 \leq \alpha \leq 180^0$, khi đó ta có:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \qquad \text{tg}(180^0 - \alpha) = -\,\text{tg}\alpha$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \text{cotg}(180^0 - \alpha) = -\,\text{cotg}\alpha$$

b) Cho $0 \leq \alpha \leq 90^0$, khi đó ta có:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha \qquad \text{tg}(90^0 - \alpha) = \text{cotg}\alpha$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha \qquad \text{cotg}(90^0 - \alpha) = \text{tg}\alpha$$

2. Một số định lí cơ bản trong tam giác.

a) Định lí hàm số sin. Trong mọi tam giác, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\ .$$

Ở đây a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, đối diện với ba góc A, B, C; còn R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

b) Định lí hàm số cosin. Trong mọi tam giác, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C\ .$$

c) Định lí hàm số cosin suy rộng (hay còn gọi là định lí hàm số cotg). Trong mọi tam giác, ta có:

$$\text{cotg}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

$$\text{cotg}B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$$

$$\text{cotg}C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}.$$

Ở đây S là diện tích tam giác.
(Suy trực tiếp từ định lí hàm số cosin,

với chú ý là : $\cos A = \text{cotg}A\sin A$ và $S = \frac{1}{2}bc\sin A$).

d) Các công thức tính diện tích tam giác.

$$S = \frac{1}{2}ah_a = S = \frac{1}{2}bc\sin A = 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{abc}{4R}$$

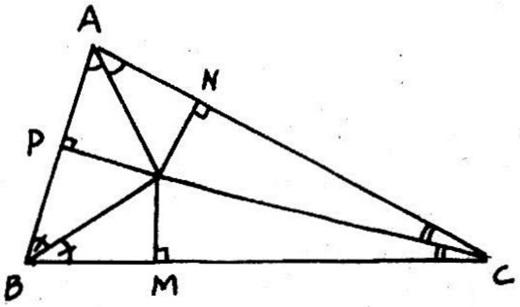
$$= pr = (p - a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ở đây h_a là chiều cao của tam giác kẻ từ A, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác, p là nửa chu vi.

e) Các công thức tính bán kính.

1) $r = (p - a)\text{tg}\frac{A}{2} = (p - b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p - c)\text{tg}\frac{C}{2}$

Chứng minh: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Kẻ IM, IN, IP lần lượt vuông góc với BC, AC, AB. Theo tính chất của hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm, ta có:



$$AP = AN,\ BP = BM,\ CM = CN$$

$$\Rightarrow \quad AP + BM + CM = p \quad \Rightarrow AP = p - (BM + CM) = p - a.$$

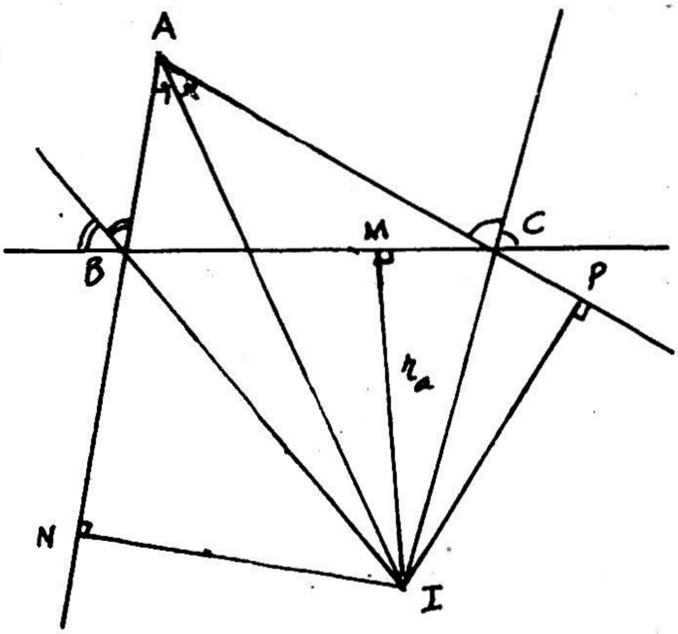
Lý luận tương tự có: $BP = p - b$; $CM = p - c$.

Từ đó suy ra:

$$r = IP = IN = IM = (p - a)\text{tg}\frac{A}{2} = (p - b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p - c)\text{tg}\frac{C}{2}$$

2) $r_a = p\text{tg}\frac{A}{2}$, $r_b = p\text{tg}\frac{B}{2}$, $r_c = p\text{tg}\frac{C}{2}$

Chứng minh: Gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, thì I là giao điểm của đường phân giác trong của góc A, với hai đường phân giác ngoài của hai góc B, C. Gọi M, N, P là các hình chiếu của I lên BC, AB, AC. Ta có theo tính chất của hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm:



$AN = AP$, $BN = BM$, $CM = CP$

Rõ ràng: $2p = AB + BC + CA = AB + BM + MC + CA$

$$= AB + BN + CP + AC = AN + AP \Rightarrow AN = AP = p$$

$$\Rightarrow r_a = IN = IP = AN\text{tg}\frac{A}{2} = p\text{tg}\frac{A}{2} \qquad \Rightarrow \text{đ.p.c.m..}$$

Lý luận tương tự, có: $r_b = p\text{tg}\frac{B}{2}$, $r_c = p\text{tg}\frac{C}{2}$.

* * *

3. Một số hệ thức cơ bản về hàm số lượng giác.

Cho $0 \leq \alpha \leq 180^0$, ta có các hệ thức cơ bản sau:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $\text{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Từ đó suy ra :

1) $\text{tg}\alpha\text{cotg}\alpha = 1$

2) $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

3) $1 + \text{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

§2. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho: $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$

BÀI GIẢI

Viết lại giả thiết dưới dạng:

$$\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{a+b}.$$

$\Rightarrow (a + b)(b\sin^4\alpha + a\cos^4\alpha) = ab(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$\Rightarrow a^2\cos^4\alpha + b^2\sin^4\alpha + ab(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha) + ab(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha) = 0$

$\Rightarrow a^2\cos^4\alpha + b^2\sin^4\alpha - ab\cos^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) - ab\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = 0$

$\Rightarrow a^2\cos^4\alpha + b^2\sin^4\alpha - 2ab\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 0$

$$\Rightarrow \quad (a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha)^2 = 0 \;\Rightarrow\; a\cos^2\alpha = b\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad a(1-\sin^2\alpha) - b\sin^2\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \sin^2\alpha = \frac{a}{a+b} \qquad (1)$$

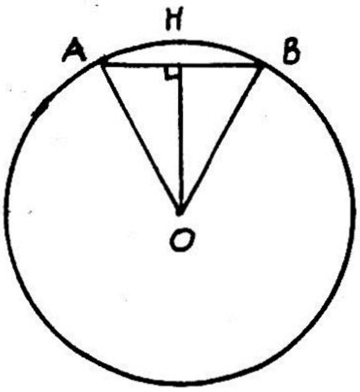
Lý luận tương tự, ta có: $\cos^2\alpha = \dfrac{b}{a+b}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra :

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{a+b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3} \Rightarrow \text{đ.p.c.m..}$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng : $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

BÀI GIẢI



Giả sử $\widehat{AOB} = 36^o$. Vẽ phân giác BK, ta có: $\widehat{ABK} = \widehat{KBO} = 36^o$

$\Rightarrow$ hai tam giác BKO và ABK tương ứng là hai tam giác cân đỉnh K và B.

$\Rightarrow AB = BK = KO = x.$

Theo định lí đường phân giác trong, ta có : $\dfrac{AK}{KO} = \dfrac{AB}{BO} \Leftrightarrow \dfrac{R-x}{x} = \dfrac{x}{R}$

$$\Rightarrow x^2 + Rx - R^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-R+R\sqrt{5}}{2} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

* * *

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow \sin 18^o = \sin HOA = \dfrac{AH}{AO} = \dfrac{x}{2R} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng có kẻ những đường thẳng song song cách đều. Có thể vẽ được một ngũ giác đều có các đỉnh nằm trên các đường thẳng đó hay không?

BÀI GIẢI

Giả sử ta vẽ được một ngũ giác đều ABCDE thoả mãn yêu cầu của bài toán, và giả sử AB không song song với các đường đã cho.

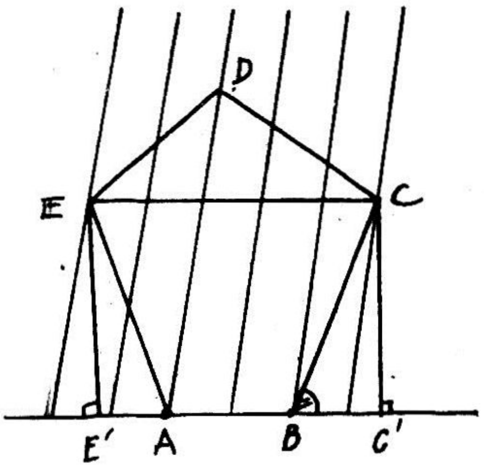
Do EC // AB và A, B, E,C nằm trên các đường thẳng // nên thấy ngay $\frac{EC}{AB}$ là số hữu tỷ.

Gọi E' và C' là hình chiếu của E và C trên AB, ta có:

EC = E'C' ; E'A = BC' , nên ta có:

$$\frac{EC}{AB} = \frac{E'C'}{AB} = \frac{E'A + AB + BC'}{AB} = 1 + 2\frac{BC'}{AB} = 1 + 2\frac{BC'}{BC}$$

$$= 1 + 2\cos\alpha = 1 + 2\cos72^0 = 1 + 2\sin18^0$$



Theo ví dụ 2, có $\sin18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

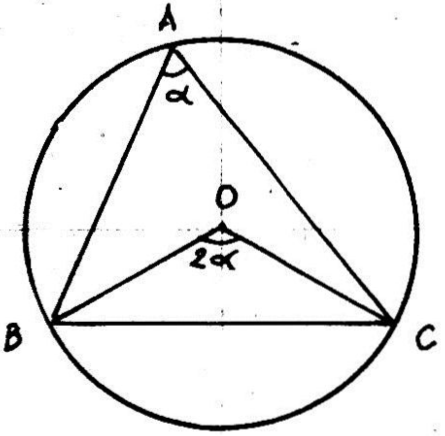
$$\Rightarrow \frac{EC}{AB} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{EC}{AB} \text{ là số vô tỷ.}$$

Ta nhận được mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng là sai. ⇒ Vậy không thể vẽ được ngũ giác đều thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4. Cho $0 \leq \alpha \leq 90^0$

Chứng minh: $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

BÀI GIẢI



Xét các trường hợp sau:

. Nếu $\alpha = 0$, khi đó

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

2. Nếu $\alpha = 90^0$,

khi đó $\sin 2\alpha = \cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

3. Nếu $0 < \alpha < 90^0$. Xét Δ ABC với $A = \alpha$

Ta có BOC là tam giác cân với $\widehat{BOC} = 2\alpha \Rightarrow$

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 90^0 - \alpha \ .$$

Trong tam giác OBC theo định lí hàm số sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{OC}{\sin\left(90^0 - \alpha\right)} \Rightarrow \frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

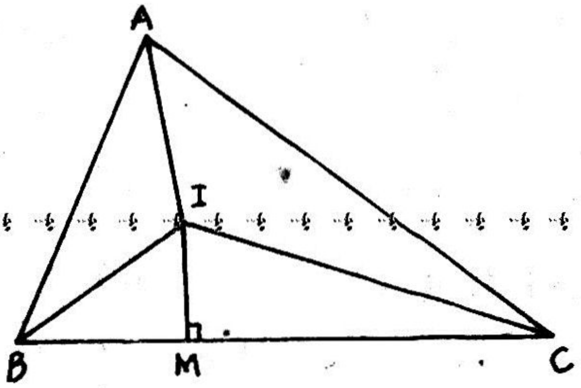
Lại áp dụng định lí hàm số sin trong Δ ABC có:

$$a = 2R\sin\alpha \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) có : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Chú ý*. Áp dụng công thức trong ví dụ 4, ta chứng minh thêm được 1 công thức quan trọng sau đây để tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.*

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$



Chứng minh: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Kẻ IM ⊥ BC

Ta có : $r = IM = IB\sin\frac{B}{2}$ (1)

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác BIC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} = \frac{BI}{\sin\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

Do $BC = a = 2R\sin A$, và theo ví dụ 4 ta có:

$$BC = 2R\ .\ 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\ .$$

Lại có: $\sin\widehat{BIC} = \sin(180^0 - \frac{B+C}{2}) = \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$.

(do $\frac{B+C}{2} + \frac{A}{2} = 90^0$), vậy từ (2) suy ra:

$$IB = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (3)$$

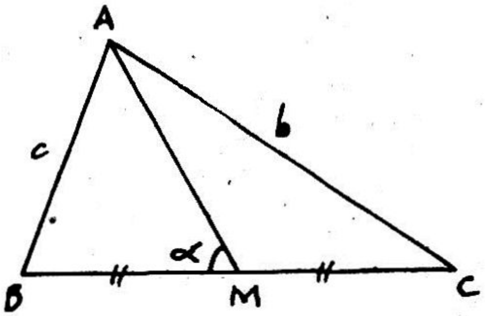
Thay (3) vào (1), có: $r = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Vẽ trung tuyến AM.

Chứng minh rằng: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$.

BÀI GIẢI

Đặt $\widehat{AMB} = \alpha \Rightarrow \widehat{AMC} = 180^0 - \alpha$.



Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác AMB, có:

$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM.BM\cos\alpha$ (1)

Áp dụng trong tam giác AMC , có:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM.MC\cos(180^0 - \alpha) \qquad (2)$$

Do : $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$, và $BM^2 = MC^2 = \dfrac{BC^2}{4}$,

nên sau khi cộng từng vế (1) và (2) có:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \qquad \Rightarrow \text{đ.p.c.m..}$$

Chú ý. *1/ Từ ví dụ 5, ta thấy ngay công thức sau đây để tính đường trung tuyến trong tam giác*

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Đó là công thức ta thường xuyên sử dụng đến.

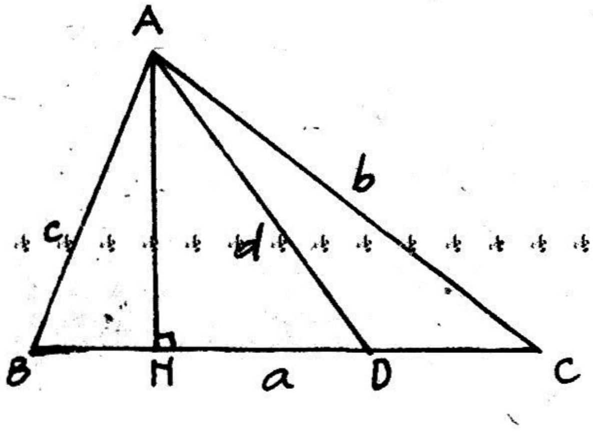
2/ Ta có kết quả tổng quát hơn như sau (kết quả này gọi là định lý Stewart) :

Cho ΔABC, D là một điểm trên cạnh BC. Đặt AD = d, BD = m, DC = n. Khi đó ta có công thức sau (gọi là hệ thức Stewart):

$ad^2 = mb^2 + nc^2 - amn.$

BÀI GIẢI

Kẻ đường cao AH. Xét hai tam giác ABD ; ACD và theo định lý hàm số cosin, ta có: .



$$c^2 = d^2 + m^2 - 2md\cos\widehat{ADB}$$

$$= d^2 + m^2 - 2m\,HD \qquad (3)$$

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2dn\cos(\pi - \widehat{ADB})$$

$$= d^2 + n^2 + 2dn\cos\widehat{ADB}$$

$$= d^2 + n^2 + 2n.\,HD \qquad (4)$$

Nhân từng vế (3) (4) theo thứ tự với n và m rồi cộng lại, ta có:

$$nc^2 + mb^2 = d^2(n + m) + mn(m + n) \qquad (5)$$

Do $m + n = a$, nên từ (5) suy ra:

$$ad^2 = mb^2 + nc^2 - amn.$$

Định lý Stewart chứng minh xong.

1) Stewart (1717 - 1785) là nhà toán học và thiên văn học người Scotland.

2) Nếu trong hệ thức Stewart xét AD là đường trung tuyến, thì từ hệ thức Stewart có:

$$a.m_a^2 = \frac{a}{2}b^2 + \frac{a}{2}c^2 - a.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \quad m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \qquad (6)$$

(6) Chính là hệ thức xác định trung tuyến quen biết trong tam giác (Xem ví dụ trên).

3) Nếu trong hệ thức Stewart xét AD là phân giác. Khi đó theo tính chất đường phân giác trong ta có:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{ac}{b + c} \quad \text{và} \quad n = \frac{ab}{b + c}$$

Từ hệ thức Stewart có:

$$a.l_a^2 = \frac{ac}{b + c}b^2 + \frac{ab}{b + c}c^2 - a\,\frac{a^2bc}{(b + c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad l_a^2 = \frac{bc\left[(b + c)^2 - a^2\right]}{(b + c)^2}$$

Vậy (7) cho ta công thức tính các đường phân giác trong của một tam giác.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Chia đoạn BC ra làm ba phần bằng nhau BM, MN, NC . Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$, $\widehat{MAN} = \beta$, $\widehat{NAC} = \gamma$

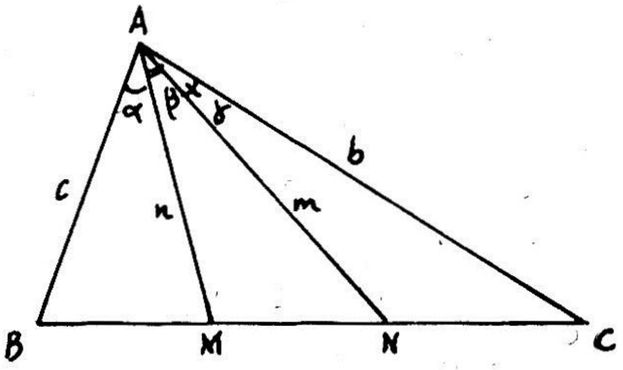
Chứng minh rằng:

$$(\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta)(\text{cotg}\beta + \text{cotg}\,\gamma) = 4(1 + \text{cotg}^2\beta)$$

BÀI GIẢI

Đặt AC = b , AB = c , BC = a , AN = m , AM = n .

Vì BM = MN = NC , nên suy ra: $S_{ABM} = S_{AMN} = S_{ANC}$



Gọi s là giá trị chung của diện tích ba tam giác trên. Áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng vào các tam giác ABM, AMN, ANC, ta có:

$$(\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta)(\text{cotg}\beta + \text{cotg}\,\gamma) =$$

$$\left[\frac{c^2+n^2-\frac{a^2}{9}+m^2+n^2-\frac{a^2}{9}}{4s}\right]\left[\frac{m^2+n^2-\frac{a^2}{9}+b^2+m^2-\frac{a^2}{9}}{4s}\right] \qquad (1)$$

* * *

Theo công thức trong ví dụ 5, ta có :

$$c^2 + m^2 = 2n^2 + \frac{BN^2}{2} = 2n^2 + \frac{2a^2}{9} .$$

$$b^2 + n^2 = 2m^2 + \frac{MC^2}{2} = 2m^2 + \frac{2a^2}{9}.$$

Thay lại vào (1), ta có:

$$(\cot g\alpha + \cot g\beta)\,(\cot g\beta + \cot g\,\gamma) = \frac{m^2n^2}{s^2} \qquad (2)$$

Do $s = S_{AMN} = \frac{1}{2}mn\sin\beta$, vậy từ (3) suy ra:

$$(\cot g\alpha + \cot g\beta)(\cot g\beta + \cot g\,\gamma) = \frac{4}{\sin^2\beta} = 4(1 + \cot g^2\beta)$$

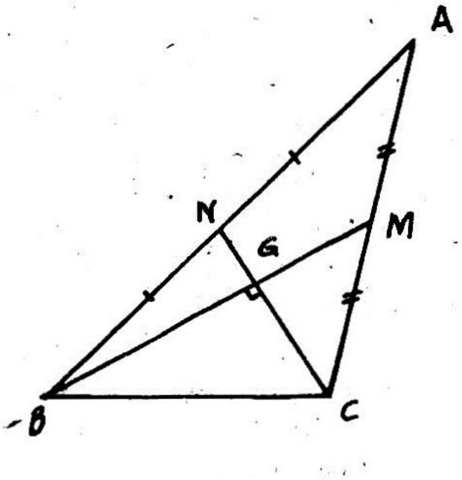
$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 7. Chứng minh rằng: $\cot gA = 2\,(\cot gB + \cot gC)$ là điều kiện cần và đủ để hai đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau.

BÀI GIẢI

Gọi BM, CN là hai trung tuyến và G là trọng tâm của tam giác. Ta có: $BM \perp CN$.

$$\Leftrightarrow BG^2 + GC^2 = BC^2 \quad (1)$$



Áp dụng chú ý trong ví dụ 5, ta có:

$$BG^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_b{}^2 + m_c{}^2)$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$= \frac{4a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Vậy từ (1) suy ra : $BM \perp CN \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$ (2)

Áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng, trong Δ ABC ta có:

$$\text{cotg}A = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = 2\left[\frac{a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4S}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - a^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = 5a^2 \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra đ.p.c.m..

Ví dụ 8. Cho tam giác vuông ABC ($A = 90^0$), BC = a và chiều cao AH = h . Chia cạnh huyền BC ra làm n phần bằng nhau (n là số nguyên lẻ). Gọi PQ là một trong các đoạn bằng nhau ấy và chứa trung điểm M của BC . Đặt $\widehat{PAQ} = \alpha$.

Chứng minh rằng: $\text{tg}\alpha = \dfrac{4nh}{(n^2 - 1)a}$

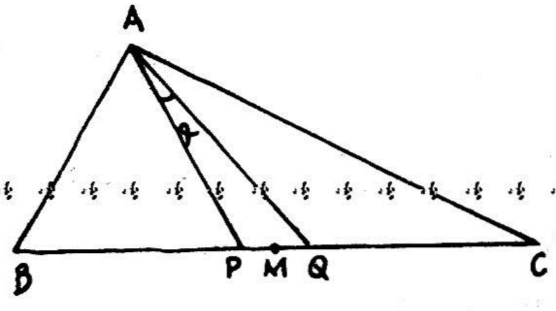
BÀI GIẢI

Áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng trong tam giác APQ, ta có:

$$\text{tg}\alpha = \frac{4S_{APQ}}{AP^2 + AQ^2 - PQ^2}$$

$$= \frac{4\,\frac{1}{2}.\,\frac{a}{n}.\,h}{AP^2 + AQ^2 - PQ^2} \quad (1)$$

* * *



Chú ý là M cũng là trung điểm của PQ, nên áp dụng ví dụ 5 vào tam giác APQ có:

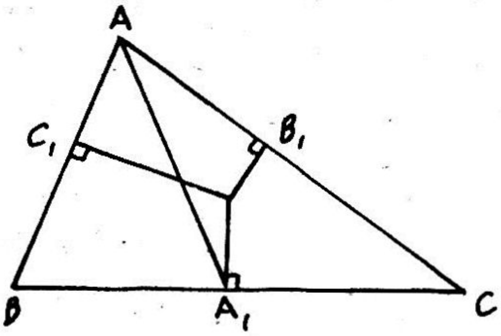
$$AP^2 + AQ^2 = 2AM^2 + \frac{PQ^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{PQ^2}{2} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) có : $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\dfrac{2ah}{n}}{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2n^2}} = \dfrac{4nh}{(n^2 - 1)a}$

$\Rightarrow$ đ.p.c.m. .

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\operatorname{cotg}\widehat{AA_1B} + \operatorname{cotg}\widehat{BB_1C} + \operatorname{cotg}\widehat{CC_1A} = 0$.

BÀI GIẢI



Áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng trong tam giác ABA_1, ta có:

$$\operatorname{cotg}\widehat{AA_1B} = \frac{AA_1{}^2 + BA_1{}^2 - AB^2}{4S_{AA_1B}} \qquad (1)$$

Ta có: $\operatorname{cotg}\widehat{AA_1B} = -\operatorname{cotg}\widehat{AA_1C}$ (2), và do đó lại theo định lí hàm số cosin suy rộng trong tam giác AA_1C có:

$$\operatorname{cotg}\widehat{AA_1C} = \frac{AA_1{}^2 + A_1C^2 - AC^2}{4S_{AA_1C}} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\operatorname{cotg}\widehat{AA_1B} = \frac{AA_1{}^2 + BA_1{}^2 - AB^2}{4S_{AA_1B}} = \frac{AC^2 - AA_1{}^2 - A_1C^2}{4S_{AA_1C}} \qquad (4)$$

Từ (4) và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau (với chú ý là $S = S_{AA_1B} + S_{AA_1C}$), ta đi đến:

$$\text{cotg}\widehat{AA_1B} = \frac{BA_1^2 - CA_1^2 + AC^2 - AB^2}{4S} \qquad (5)$$

Rõ ràng: $BA_1^2 - CA_1^2 = (MB^2 - MA_1^2) - (MC^2 - MA_1^2)$

$= MB^2 - MC^2$, vậy suy ra:

$$\text{cotg}\widehat{AA_1B} = \frac{AC^2 - AB^2 + MB^2 - MC^2}{4S} \qquad (6)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\text{cotg}\widehat{BB_1C} = \frac{BA^2 - BC^2 + MC^2 - MA^2}{4S} \qquad (7)$$

$$\text{cotg}\widehat{CC_1A} = \frac{CB^2 - CA^2 + MA^2 - MB^2}{4S} \qquad (8)$$

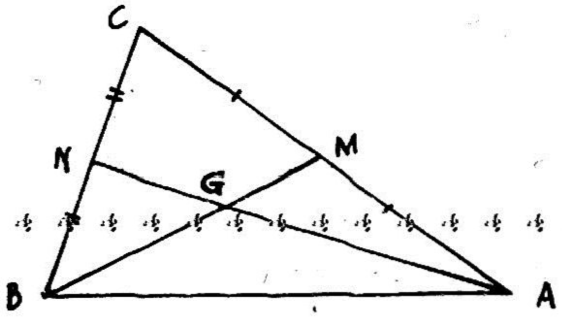
Cộng từng vế (6) (7) (8) suy ra đ.p.c.m..

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng:

$$\text{cotg}C - \text{cotg}\widehat{AGB} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6S}$$

ở đây S là diện tích tam giác ABC.

BÀI GIẢI



Vẽ hai trung tuyến AN và BM. Theo định lí hàm số cosin suy rộng trong các tam giác ABC và ABG có:

$$\text{cotg}C - \text{cotg}\widehat{AGB} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{4S_{GAB}}$$

Ta có: $S_{GAB} = \frac{S}{3}$ (2)

$$GA^2 + GB^2 - AB^2 = \frac{4}{9}(m_a{}^2 + m_b{}^2) - c^2$$

$$= \frac{4}{9}\ \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} - c^2 = \frac{b^2 + a^2 - 5c^2}{9} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), có $\text{cotg}C - \text{cotg}\widehat{AGB} =$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \frac{b^2 + a^2 - 5c^2}{12S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6S}$$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 11. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi R_1, R_2, R_3 tương ứng là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB. Gọi R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$R_1R_2R_3 = 2R^2r.$$

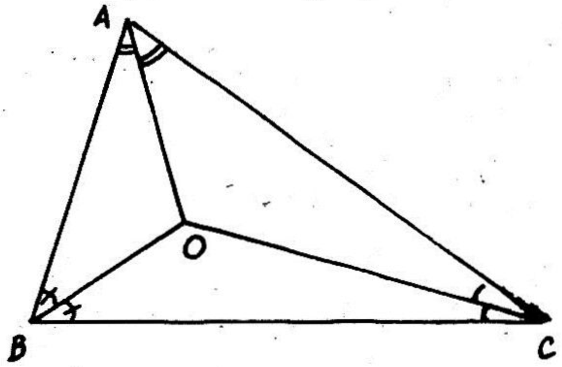
BÀI GIẢI

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác OBC, ta có:

$$R_1 = \frac{a}{2\sin\widehat{BOC}} = \frac{a}{2\sin\left(180^0 - \frac{B+C}{2}\right)}$$

$$= \frac{a}{2\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

(do $\frac{B+C}{2} + \frac{A}{2} = 90^0$)



Lý luận tương tự, có:

$$R_2 = \frac{b}{2\cos\frac{B}{2}} \ ; \ R_3 = \frac{c}{2\cos\frac{C}{2}}$$

Như vậy: $$R_1R_2R_3 = \frac{abc}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ABC, có:

$a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, nên từ (1) có:

$$R_1R_2R_3 = \frac{R^3\sin A \sin B \sin C}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

Áp dụng công thức: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ với $0 \leq \alpha \leq 90^0$. (Xem ví dụ 4). Từ (2) suy ra:

$$R_1R_2R_3 = 8R^3 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (3)$$

Theo ví dụ 4 ta có: $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, vậy từ (3) ta được :

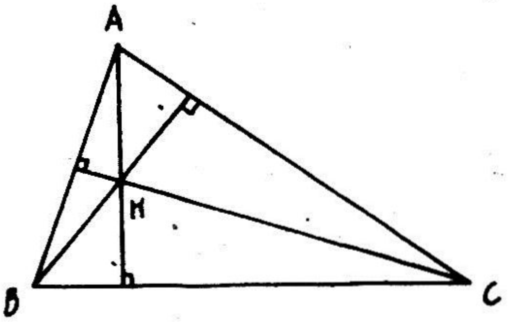
$$R_1R_2R_3 = 2R^2r \ .$$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HAC, HAB bằng nhau.

BÀI GIẢI

Gọi R_1, R_2, R_3 tương ứng là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HAC, HAB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác BHC, ta có:

$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\widehat{BHC}} = \frac{a}{2\sin(180^0 - A)} = \frac{a}{2\sin A} \qquad (1)$$

Theo định lí hàm số sin trong tam giác ABC có:

$$\frac{a}{2\sin A} = R \ ; \qquad \text{vậy từ (1) có } R_1 = R$$

Do vai trò bình đẳng giữa R_1, R_2, R_3 có $R_2 = R, R_3 = R$

$\Rightarrow R_1 = R_2 = R_3$. $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 13. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

1. $bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0$

2. $2abc(\cos A + \cos B) = (a + b)(c + b - a)(c + a - b)$

3. $abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c)$

Ở đây a, b, c là độ dài ba cạnh đối diện với các góc A, B, C tương ứng, còn p là nửa chu vi.

BÀI GIẢI

Ta chỉ chứng minh phần 3, còn phần 1, 2, chứng minh hoàn toàn tương tự.

Áp dụng định lí hàm số cosin, ta có:

$$abc(\cos A + \cos B + \cos C) =$$

$$= a\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + c\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$$= a^2\frac{b + c - a}{2} + b^2\frac{a + c - b}{2} + c^2\frac{a + b - c}{2} \qquad (1)$$

Do $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ nên từ (1) suy ra:

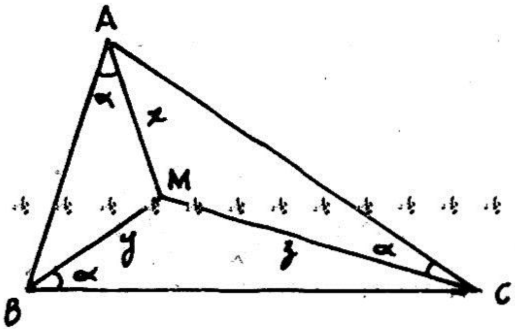
$$abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c).$$

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC, M là một điểm trong tam giác sao cho: $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$.

Chứng minh rằng: $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$.

BÀI GIẢI



Đặt MA = x, MB = y, MC = z. Áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng trong các tam giác MAB, MBC, MCA có:

$$\cot g\alpha = \frac{c^2 + x^2 - y^2}{4S_{MAB}} = \frac{a^2 + y^2 - z^2}{4S_{MBC}} = \frac{b^2 + z^2 - x^2}{4S_{MAC}} \qquad (1)$$

Từ (1) và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\cot g\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \qquad (2)$$

Do lại áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng trong tam giác ABC ta suy ra: co~~s~~tgA + co~~s~~tgB + co~~s~~tgC =

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra đ.p.c.m..

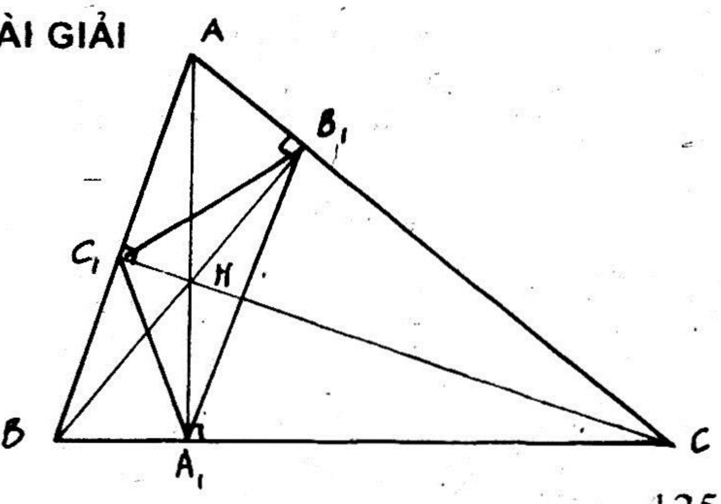
Chú ý. *Điểm M xác định như trong ví dụ 13 gọi là điểm Broca, còn góc α gọi là góc Broca.*

Ví dụ 15. Cho ABC là tam giác nhọn. Gọi A_1, B_1, C_1 là chân ba đường cao và H là trực tâm. Gọi p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$.

1) Chứng minh $S = p_1R$, ở đây S là diện tích còn R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kết luận có còn đúng không nếu tam giác có một góc tù.

2) Chứng minh rằng $S_{HA_1B_1} = R^2 \sin 2C \cos A \cos B \cos C$.

BÀI GIẢI



1) Ta thấy AC_1HB_1 là tứ giác nội tiếp trong đường tròn đường kính AH. Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác AB_1C_1, ta có:

$B_1C_1 = AH\sin A$. Tương tự: $A_1C_1 = BH\sin B$, $B_1A_1 = CH\sin C$.

$$\Rightarrow \quad p_1R = \frac{1}{2}(R\sin A.AH + R\sin B.BH + R\sin C.CH)$$

$$= \frac{1}{4}(AH.BC + BH.AC + CH.AB)$$

$$= \frac{1}{4}AH(BA_1 + A_1C) + \frac{1}{4}BH(AB_1 + B_1C) + \frac{1}{4}CH(AC_1 + C_1B)$$

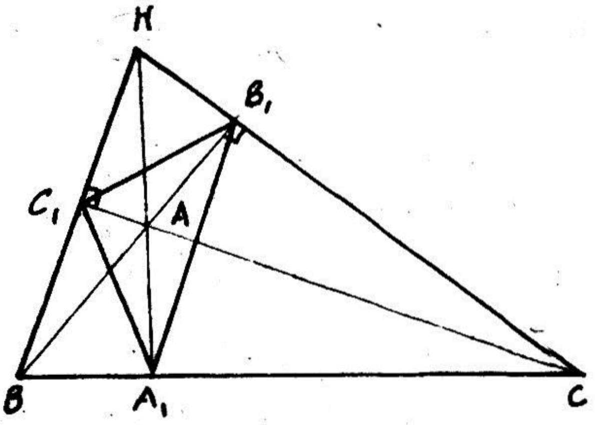
$$= \frac{1}{2}S_{ABH} + \frac{1}{2}S_{ACH} + \frac{1}{2}S_{BCH} + \frac{1}{2}S_{ABH} + \frac{1}{2}S_{ACH} + \frac{1}{2}S_{BCH} = S$$

$\Rightarrow \quad S = p_1R \quad \Rightarrow \quad$ đ.p.c.m..

- Nếu tam giác ABC có một góc tù, thí dụ $A > 90^0$. Ta có :

$\widehat{BHC} = 180^0 - A$

$$\Rightarrow \sin\widehat{BHC} = \sin A = \frac{BC}{2R}.$$



Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC bằng R.

Do HBC là tam giác nhọn, nên ta có:

$S_{HBC} = Rp_1$ mà $S_{HBC} > S_{ABC} \Rightarrow S < p_1R$.

Vậy kết luận bài toán sẽ không đúng nếu ABC là tam giác có góc tù.

* * *

2) Ta có: $\quad HA_1 = CA_1 \cot g\widehat{A_1HC} = AC\cos C\cot gB$

$$= 2R\sin B\cos C\cot gB = 2R\cos B\cos C$$

$$\Rightarrow \qquad S_{HA_1B_1} = \frac{1}{2}HA_1.HB_1\sin\widehat{A_1HB_1}$$

$$= \frac{1}{2}(2R\cos B\cos C)\,(2R\cos A\cos sC)\sin C$$

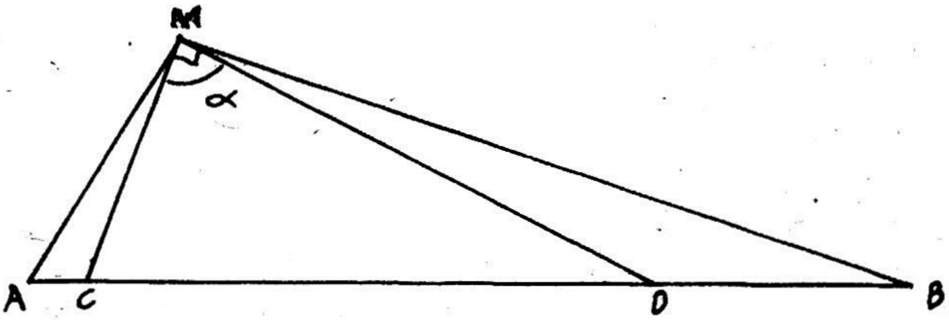
$$\Rightarrow \qquad S_{HA_1B_1} = R^2\sin 2C\cos A\cos B\cos C$$

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 16. Trên đoạn thẳng AB lấy C , D sao cho C $\in$ AD, M là một điểm ngoài AB sao cho $\widehat{AMD} = \widehat{CMB} = 90^0$. Đặt $\widehat{CMD} = \alpha$. Giả sử $S_{AMD} = S_1$, $S_{BCM} = S_2$. Chứng minh rằng:

$$S_{ABM} = \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1+S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$$

BÀI GIẢI



Dễ thấy $\widehat{AMB} = 90^0 + 90^0 - \alpha = 180^0 - \alpha \Rightarrow \sin\widehat{AMB} = \sin\alpha$.

Đặt $x = S_{MAB}$; $y = S_{MCD}$ thì $x > y$; Lại có $x + y = S_1 + S_2$ (1)

còn $xy = (\frac{1}{2}MA.MB\sin\alpha)(\frac{1}{2}MC.MD\sin\alpha) =$

$$= (\frac{1}{2}MA.MD)\,(\frac{1}{2}MB.MC)\sin^2\alpha = S_1S_2\sin^2\alpha \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) theo định lí Viet ta có x, y là các nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - (S_1 + S_2)t + S_1S_2\sin^2\alpha = 0$$

Do x > y, nên:

$$x = S_{ABM} = \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC. Giả sử D, E là hai điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACE tiếp xúc với các cạnh BC tương ứng tại M, N.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{1}{NC} + \dfrac{1}{NE}$

BÀI GIẢI

Theo tính chất của hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm áp dụng vào đường tròn nội tiếp trong Δ ABD, ta có:

$$BM = p_1 - AD\ ;\ DM = p_1 - AB,$$

ở đây p_1 là nửa chu vi của Δ ABD, do vậy:

$$BM = \frac{AB + AD + BD}{2} - AD = \frac{AB + BD - AD}{2}$$

$$DM = \frac{AB + AD + BD}{2} - AB = \frac{AD + BD - AB}{2}.$$

Ta có: $$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{2}{AB+BD-AD}+\frac{2}{AD+BD-AB}=$$

$$=\frac{4BD}{BD^2-(AB-AD)^2} \qquad (1)$$

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác ABD, có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.\ AD.\cos\alpha$ (ở đây $\widehat{BAD}=\widehat{CAE}=\alpha$), nên từ (1) suy ra:

$$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{2BD}{AB.AD.(1-\cos\alpha)} \qquad (2)$$

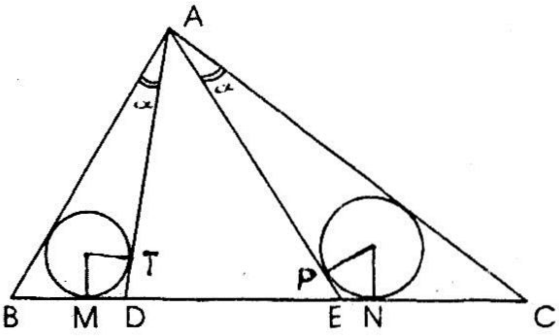
Lý luận hoàn toàn tương tự trong tam giác AEC có :

$$\frac{1}{NC}+\frac{1}{NE}=\frac{2EC}{AE.AC.(1-\cos\alpha)} \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức sau:

$$\frac{BD}{AB.AD}=\frac{EC}{AE.AC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{BD}{EC}=\frac{AB.AD}{AE.AC} \quad (4)$$



Vì hai tam giác ABD, AEC có chung chiều cao kẻ từ A, nên hiển nhiên:

$$\frac{BD}{EC}=\frac{S_{ABC}}{S_{AEC}}=\frac{\frac{1}{2}AB.\ AD\sin\alpha}{\frac{1}{2}AE.AC.\sin\alpha}=\frac{AB.\ AD}{AE\ .\ AC}$$

Vậy (4) đúng và đó là đ.p.c.m..

***Chú ý** : Ta có thể giải bằng cách khác như sau:*

Cách 2: Gọi p_1 là nửa chu vi của tam giác ABD. Theo công thức Hêrông, ta có:

$$S_{ABD} = \sqrt{p_1 (p_1 - AB)(p_1 - AD)(p_1 - BD)} = \sqrt{p_1 . DM . BM . AT}$$

Tương tự, ta có: $S_{AEC} = \sqrt{p_2 . NE . NC . AP}$

Như vậy ta đi đến :

$$\left(\frac{S_{ABD}}{S_{AEC}}\right)^2 = \frac{MB . MD}{NE . NC} . \frac{p_1 . AT}{p_2 . AP} \qquad (5)$$

Do hai tam giác ABD và AEC có cùng chiều cao kẻ từ A, nên lại có:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEC}} = \frac{BD}{EC} \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra :

$$\left(\frac{BD}{EC}\right)^2 = \frac{MB . MD}{NE . NC} . \frac{P_1.AT}{P_2.AP} \qquad (7)$$

Gọi r_1, r_2 tương ứng là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và AEC, thì AT = $r_1 \text{cotg} \frac{\alpha}{2}$; AP = $r_2 \text{cotg} \frac{\alpha}{2}$. Thay vào (7) ta có :

$$\left(\frac{BD}{EC}\right)^2 = \frac{MB\,.\,MD}{NE\,.\,NC}\ \ \frac{p_1\,.r_1}{p_2\,.\,r_2} \qquad (8)$$

Vì : $\dfrac{p_1r_1}{p_2r_2\,.} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{AEC}} = \dfrac{BD}{EC}$; nên từ (8) suy ra:

$$\frac{BD}{EC} = \frac{MB\,.\,MD}{NE\,.\,NC}$$

$$\Leftrightarrow \quad BD\,.\,NC.\,NE = EC\,.\,MB\,.\,MD$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{EC}{NC\,.\,NE} = \frac{BD}{MB\,.\,MD}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{NC + NE}{NC\,.\,NE} = \frac{MB + MD}{MB\,.\,MD}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{NC + NE} = \frac{1}{MB + MD}$$

Đó là đ.p.c.m..

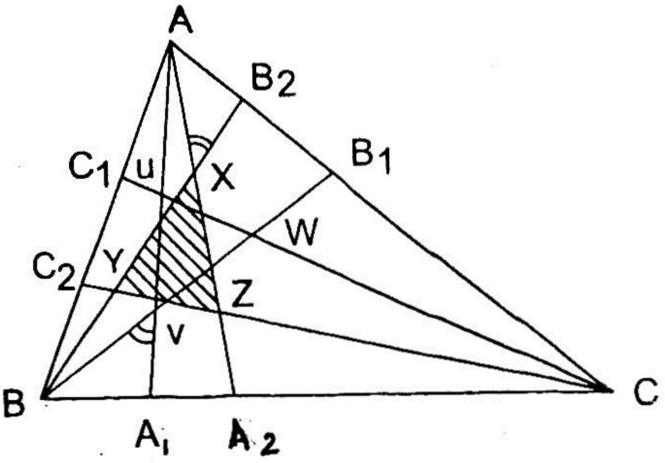
Ví dụ 18. Cho tam giác nhọn ABC . A_1, A_2 lấy trên cạnh BC (A_2 nằm giữa A_1 và C), B_1, B_2 lấy trên cạnh AC (B_2 nằm giữa B_1 và A), C_1, C_2 lấy trên cạnh AB (C_2 nằm giữa C_1 và B) sao cho:

$$\widehat{AA_1A_2} = \widehat{AA_2A_1} = \widehat{BB_1B_2} = \widehat{BB_2B_1} = \widehat{CC_1C_2} = \widehat{CC_2C_1}$$

Các đường thẳng AA_1 , BB_1 , CC_1 tạo thành một tam giác, còn các đường thẳng AA_2 , BB_2 , CC_2 tạo thành một tam giác thứ hai. Chứng minh rằng 6 đỉnh của hai tam giác vừa nói ở trên cùng nằm trên một đường tròn.

BÀI GIẢI

Rõ ràng nếu gọi UVW và XYZ là hai tam giác tạo thành như trên, thì ta có:



$\widehat{AB_2B} = \widehat{AC_1C} \quad \Rightarrow$

$\Delta\, AB_2B \approx \Delta\, AC_1C$ (g.g) $\Rightarrow$

$\dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{AB_2}{AB}$ và $\widehat{ABB_2} = \widehat{ACC_1}$

Tương tự có: $\widehat{BAA_1} = \widehat{BCC_2}$

Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{A_1VB} &= \widehat{BAA_1} + \widehat{ABB_2} + \widehat{B_1BB_2}\\ &= \widehat{BCC_2} + \widehat{ACC_1} + \widehat{C_2CC_1} = \widehat{ACB}\end{aligned}$$

(chú ý là $\widehat{B_1BB_2} = \widehat{C_2CC_1}$ do từ giả thiết suy ra các tam giác cân sau đây đồng dạng với nhau AA_1A_2, BB_1B_2 ,CC_1C_2 ,).

Như vậy ta đi đến $\quad \widehat{A_1VB} = \widehat{ACB}$ (1)

Tương tự: $\quad \widehat{ACB} = \widehat{AXB_2}$ (2)

Và $\quad \widehat{A_2ZC} = \widehat{ABC} = \widehat{AUC_1}$ (3)

Theo định lí hàm số sin trong Δ AVB, ta có:

$$\frac{AV}{\sin\widehat{ABV}} = \frac{AB}{\sin\widehat{AVB}}$$

Do $\quad \widehat{AVB} + \widehat{A_1VB} = 180^0$

$$\Rightarrow \quad \frac{AV}{\sin\widehat{ABV}} = \frac{AB}{\sin\widehat{A_1VB}} = \frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} \qquad \text{(theo (1))}$$

Lại theo định lí hàm số sin trong Δ ABC, ta có:

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{AC}{\sin\widehat{A_2ZC}} \qquad \text{(theo (3))}$$

Do $\widehat{A_2ZC} + \widehat{AZC} = 180^0 \Rightarrow \sin\widehat{A_2ZC} = \sin\widehat{AZC}$ và ta đi đến:

$$\frac{AV}{\sin\widehat{ABV}} = \frac{AC}{\sin\widehat{AZC}}$$

Trong Δ AZC, theo định lí hàm số sin lại có:

$$\frac{AC}{\sin\widehat{AZC}} = \frac{AZ}{\sin\widehat{ACZ}}$$

Tóm lại ta có: $\dfrac{AV}{\sin\widehat{ABV}} = \dfrac{AZ}{\sin\widehat{ACZ}}$

Dễ thấy $\widehat{ABV} = \widehat{ACZ} \Rightarrow AV = AZ$ (4)

Chứng minh tương tự, có: $BW = BX$ (5)

$CU = CY$ (6)

Bằng cách làm tương tự như trên, ta có:

$$\frac{AU}{\sin\widehat{AC_1U}} = \frac{AC_1}{\sin\widehat{AUC_1}} = \frac{AC_1}{AC}\cdot\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$$

$$= \frac{AB_2}{AB}\cdot\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{AB_2}{\sin\widehat{AXB_2}} = \frac{AX}{\sin\widehat{AB_2X}}$$

$\Rightarrow AU = AX$ (7)

Lí luận tương tự có: $BV = BY$ (8)

$CW = CZ$ (9)

Từ (7) suy ra UX // BC, từ (5) suy ra XW // CA

Xét tứ giác UVWX, có: $\widehat{AUX} = \widehat{AA_1A_2}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{AA_1A_2} = \widehat{BB_1B_2}$ (g/t) ; $\widehat{BB_1B_2} = \widehat{BWX}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{AUX} = \widehat{BWX} \Rightarrow$ tứ giác UVWX nội tiếp $\Rightarrow$ X nằm trên đường tròn ngoại tiếp Δ UVW, tương tự với Y, Z . Tóm lại sáu điểm U, V, W, X, Y, Z cùng nằm trên 1 đường tròn. Đó chính là đ.p.c.m..

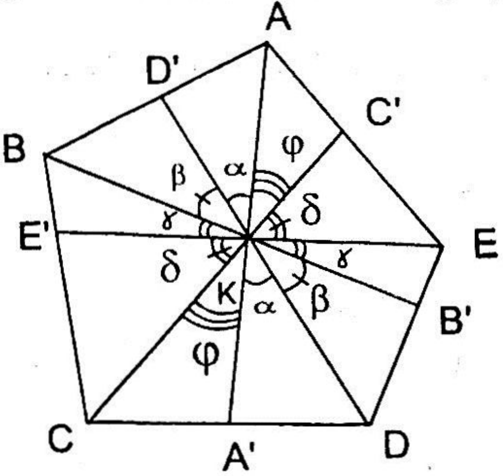
Ví dụ 19. *(Định lí Pông-sơ-lê)*

Chứng minh rằng các đường thẳng nối các đỉnh của một đa giác lồi có số lẻ cạnh với một điểm bất kỳ ở bên trong đa giác, xác định trên các cạnh đối diện các đoạn thẳng mà tích những đoạn không có đầu mút chung bằng tích những đoạn còn lại.

(đa giác $A_1A_2...A_{2k+1}$ có 2k + 1 đỉnh, thì cạnh đối diện với đỉnh A_1 là cạnh A_{k+1} A_{k+2}...).

BÀI GIẢI

Ta chứng minh định lý Pông-sơ-lê *cho trường hợp ngũ giác lồi (với đa giác có số lẻ cạnh khác ≥ 7 chứng minh hoàn toàn tương tự).*



Xét ngũ giác lồi ABCDE và K là một điểm bất kì ở trong đa giác: AK, BK, CK, DK, EK tương ứng cắt các cạnh đối diện tại A', B', C', D', E'. Kí hiệu : α, β, γ, δ, φ là các góc có đỉnh là K (Xem hình vẽ) Ta phải chứng minh:

$$AD'.BE'.CA'.DB'.EC' = D'B.E'C.A'D.B'E.C'A \qquad (1)$$

Theo định lí hàm số sin trong tam giác KAD' và KBD' ta có:

$$\frac{AD'}{\sin\alpha} = \frac{KA}{\sin\widehat{KD'A}} \qquad (2)$$

$$\frac{BD'}{\sin\beta} = \frac{KB}{\sin\widehat{KD'B}} \qquad (3)$$

Vì $\widehat{KD'A} + \widehat{KD'B} = 180^0$, nên từ (3) (2) suy ra:

$$\frac{AD'}{BD'} = \frac{KA\sin\alpha}{KB\sin\beta} \qquad (4)$$

Lý luận tương tự có:

$$\frac{BE'}{CE'} = \frac{KB}{KC} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \quad ; \quad (5)$$

$$\frac{CA'}{DA'} = \frac{KC}{KD} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} \quad ; \quad (6)$$

$$\frac{DB'}{EB'} = \frac{KD}{KE} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad ; \quad (7)$$

$$\frac{EC'}{AC'} = \frac{KE}{KA} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\varphi} \quad ; \quad (8)$$

Nhân từng vế (4) - (8) suy ra (1) đúng, và đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 20. Cho ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại M. Giả sử R_1, R_2, R_3, R_4 là các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MCD, MDA. Chứng minh rằng bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD được tính bằng công thức sau.

$$R = \sqrt{\frac{(R_1R_4 + R_2R_3)(R_1R_2 + R_3R_4)}{R_1R_3 + R_2R_4}}$$

BÀI GIẢI

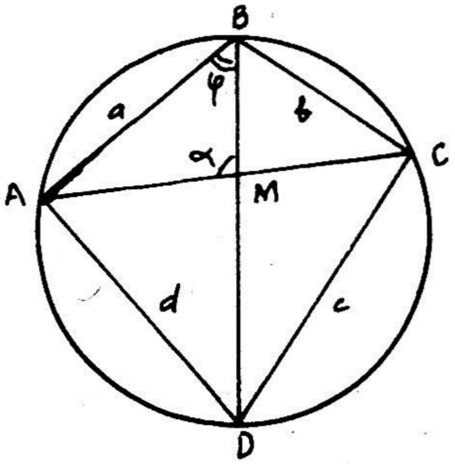
Đặt AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, $\widehat{AMB} = \alpha$, $\widehat{ABM} = \varphi$

Theo định lí hàm số sin trong các Δ MAB, MBC, MCD, MDA ta có:

$$R_1 = \frac{a}{2\sin\alpha} \quad , R_2 = \frac{b}{2\sin\widehat{BMC}} = \frac{b}{2\sin\left(180^0 - \alpha\right)} = \frac{b}{2\sin\alpha}$$

Tương tự: $R_3 = \dfrac{c}{2\sin\alpha}$,

$R_4 = \dfrac{d}{2\sin\alpha}$,



Lại theo định lí hàm số sin trong ΔMAB, ta có: $MA = 2R_1\sin\varphi$

Lại áp dụng định lí hàm số sin trong Δ BAD, ta có: $\sin\varphi = \dfrac{d}{2R}$

(ở đây R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD và cũng là đường tròn ngoại tiếp Δ BAD)

$$\Rightarrow \quad MA = \frac{R_1 d}{R} \qquad (1)$$

Lại theo định lí hàm số sin trong Δ MDA thì $d = 2R_4\sin\alpha$

Thay lại vào (1) có: $MA = \dfrac{2R_1R_4\sin\alpha}{R}$ (2)

Lí luận hoàn toàn tương tự, có: $MC = \dfrac{2R_2R_3\sin\alpha}{R}$ (3)

Từ (2) (3) suy ra $AC = MA + MC = \dfrac{2\sin\alpha\left(R_1R_4 + R_2R_3\right)}{R}$ (4)

Lí luận tương tự, suy ra $BD = \dfrac{2\sin\alpha\left(R_1R_2 + R_3R_4\right)}{R}$ (5)

Theo định lí Ptoleme với tứ giác nội tiếp ABCD, có:

$$AC.BD = ac + bd$$

Từ (4) (5) và các kết quả trên suy ra:

$$\frac{4\sin^2\alpha(R_1R_4+R_2R_3)(R_1R_2+R_3R_4)}{R^2} = 4\sin^2\alpha(R_1R_3+R_2R_4)$$

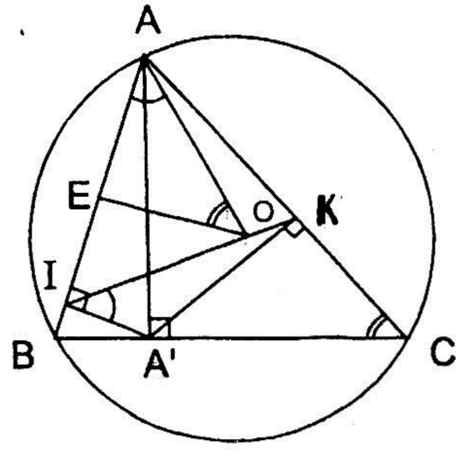
Từ đó ta đi đến công thức sau tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD

$$R = \sqrt{\frac{(R_1R_4+R_2R_3)(R_1R_2+R_3R_4)}{R_1R_3+R_2R_4}}$$

Ví dụ 21. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R, đường cao $AA' = R\sqrt{2}$. Gọi I, K là hình chiếu của A' lên AB, AC. Chứng minh I, O, K thẳng hàng.

BÀI GIẢI

Do AIA'K là tứ giác nội tiếp ⇒ $\widehat{AKI} = \widehat{AA'I}$



Mặt khác: $\widehat{AA'I} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) ⇒ $\widehat{AKI} = \widehat{ABC}$ ⇒ tứ giác BIKC là tứ giác nội tiếp ⇒

$\widehat{AIK} = \widehat{ACB}$ (vì cùng bù $\widehat{BIK}$)

Ta có: $S_{AIK} = \frac{1}{2}AI.AK\sin A$ (1)

Ta có trong các Δ vuông AIA' và AKA'

$$AI = AA'\sin\widehat{AA'I} = R\sqrt{2}\sin\widehat{AA'I} = R\sqrt{2}\sin B$$

$$AK = AA'\sin\widehat{AA'K} = R\sqrt{2}\sin\widehat{AA'K} = R\sqrt{2}\sin C$$

Vậy thay vào (1), có:

$$S_{AIK} = R^2 \sin B \sin C \sin A$$

Do: $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{AIK}$ (2)

Ta có: $\widehat{IAO} = 90^0 - \widehat{AOE}$ ($OE \perp AB$). Do $\widehat{AOE} = C$

$$\Rightarrow \widehat{IAO} = 90^0 - C$$

Lại có : $\widehat{A'IK} = 90^0 - \widehat{AIK}$ mà $\widehat{AIK} = C \Rightarrow \widehat{A'IK} = C - 90^0$

Vậy: $\widehat{IAO} = \widehat{A'IK}$, mà $A'I \perp AI \Rightarrow AO \perp IK$

Giả sử $AO \cap IK = J$. Ta có : $S_{IAK} = \frac{1}{2} IK.AJ$

Áp dụng định lí hàm số sin trong Δ AIK (Chú ý rằng đường tròn ngoại tiếp Δ AIK chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác AIA'K nhận $AA' = R\sqrt{2}$ là đường kính), ta có:

$$IK = R\sqrt{2} \sin A \quad \Rightarrow \quad S_{IAK} = \frac{1}{2} R\sqrt{2} . AJ\sin A$$

Mặt khác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AA'$

$$= \frac{1}{2} R\sqrt{2} . BC = \frac{1}{2} R\sqrt{2} . 2R\sin A = R^2\sqrt{2} \sin A$$

Theo (2) suy ra: $R^2\sqrt{2} \sin A = R\sqrt{2}\ AJ. \sin A$

$$AJ = R = AO$$

mà A, O, J thẳng hàng $\Rightarrow O \equiv J$

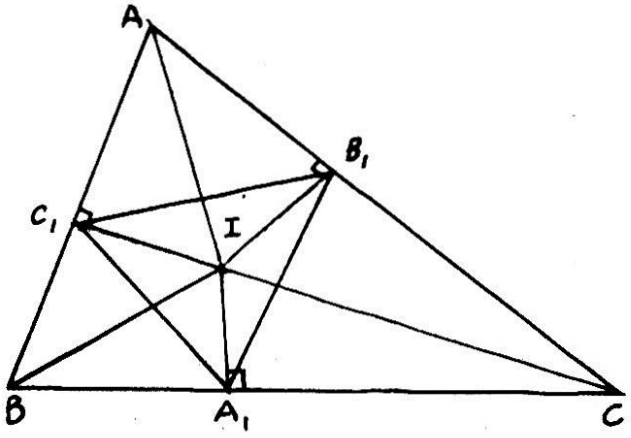
$\Rightarrow$ I, O, K thẳng hàng , đ.p.c.m..

Ví dụ 22. Cho Δ ABC nội tiếp trong đường tròn bán kính 1, và có ba cạnh là a, b, c. Từ một điểm I bất kỳ trong tam giác kẻ các đường vuông góc với các cạnh của tam giác cắt các cạnh đó tại A_1,B_1,C_1. Gọi p_1 là nửa chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$

Chứng minh rằng : $p_1 \geq \dfrac{abc}{4}$

BÀI GIẢI

Xét tứ giác nội tiếp AB_1IC_1 và áp dụng định lí hàm số sin , trong tam giác AB_1C_1, ta có :



$$B_1C_1 = AI\sin A \quad (1)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABC, ta có:

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a}{2} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), có: $B_1C_1 = \dfrac{1}{2}AI.a$

Lí luận tương tự có $A_1C_1 = \dfrac{1}{2}BI.b$

$$A_1B_1 = \frac{1}{2}CI.c$$

$$\Rightarrow \; p_1 = \frac{1}{2}(B_1C_1 + A_1C_1 + A_1B_1) = \frac{1}{4}(AI.a + BI.b + CI.c) \quad (3)$$

Do BC $\geq h_1 + h_2$, ở đây h_1, h_2 tương ứng là các khoảng cách từ B và C xuống AI

$$\Rightarrow \; \frac{1}{2}AI.BC \geq \frac{1}{2}AI(h_1 + h_2)$$

$$\Rightarrow \quad AI.\frac{a}{2} \geq S_{ABI} + S_{ACI}$$

Lý luận tương tự có: $BI.\frac{b}{2} \geq S_{ABI} + S_{ACI}$

$$CI.\frac{c}{2} \geq S_{BCI} + S_{ACI}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(AI.a + BI.b + CI.c) \geq S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{abc}{4} \qquad (4)$$

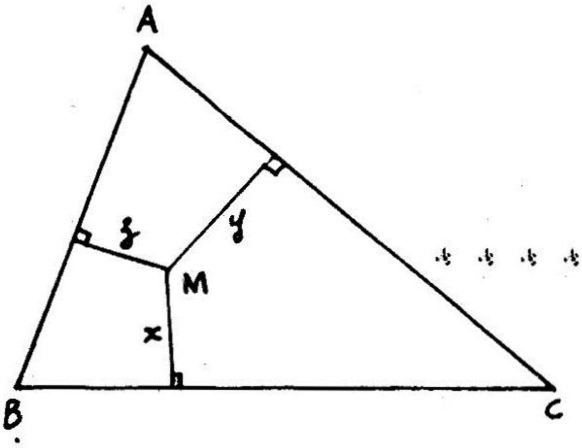
Từ (3) và (4) suy ra $p_1 \geq \frac{abc}{4}$ $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ I là trực tâm Δ ABC .

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi x, y, z là các khoảng cách từ M xuống BC, AC, AB.

Chứng minh $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$

BÀI GIẢI



Do $S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S$

$$\Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S} + \frac{S_{MAC}}{S} + \frac{S_{MAB}}{S} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$$

Do vậy $h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c).\left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}\right)$ (1)

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

(ở đây lấy $a_1 = \sqrt{h_{a'}}$, $a_2 = \sqrt{h_{b'}}$, $a_3 = \sqrt{h_{c'}}$)

$$b_1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h_a}} \text{ , } b_2 = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{h_b}} \text{ , } b_3 = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{h_c}}$$

$$(h_a + h_b + h_c) \cdot \left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}\right) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\sqrt{h_c + h_b + h_c} \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{h_a}{\sqrt{x}} = \frac{h_b}{\sqrt{y}} = \frac{h_c}{\sqrt{z}}$

Do trong tam giác ABC luôn có:

$h_a = b\sin C$, $h_b = c\sin A$, $h_c = a\sin B$, nên có:

$$\sqrt{h_c + h_b + h_c} = \sqrt{b\sin C + c\sin A + a\sin B} = \sqrt{\frac{bc + ac + ab}{2R}}$$

Theo bất đẳng thức Côsi suy ra:

$$\sqrt{h_c + h_b + h_c} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$

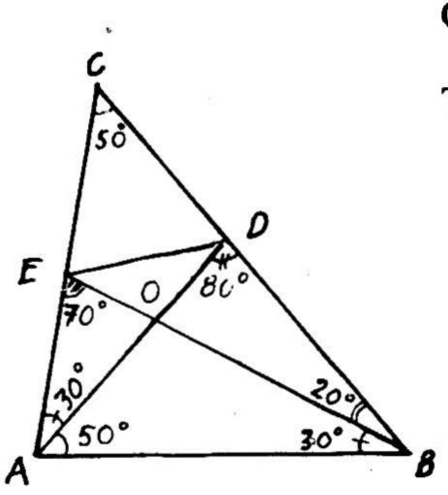
$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều và M là tâm của tam giác.

Ví dụ 24. Trên hai cạnh BC và AC của tam giác ABC lấy D và E sao cho $\widehat{BAD} = 50^0$, $\widehat{ABE} = 30^0$. Biết rằng $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50^0$.

Chứng minh rằng $\widehat{BED} = 40^0$.

BÀI GIẢI



Giả sử AD cắt BE tại O.

Ta có: $\widehat{AOB} = 180^0 - (50^0 + 30^0) = 100^0$

$\widehat{BDA} = 180^0 - (50^0 + 50^0) = 80^0$

$\widehat{CBE} = 50^0 - 30^0 = 20^0$

$\widehat{AEB} = 50^0 + 20^0 = 70^0$

$\widehat{CAD} = 180^0 - 3.50^0 = 30^0$

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ODB, có:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{\sin 20^0}{\sin 80^0}$$

Tương tự có: $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{\sin 50^0}{\sin 30^0}$, $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{\sin 70^0}{\sin 30^0}$

Rõ ràng: $\dfrac{OD}{OE} = \dfrac{OD}{OB} \cdot \dfrac{OB}{OA} \cdot \dfrac{OA}{OE}$

Vì vậy theo các kết quả trên suy ra:

$$\frac{OD}{OE} = \frac{\sin 20^0 \sin 50^0 \sin 70^0}{\sin 80^0 \sin 30^0 \sin 30^0} = \frac{4 \sin 20^0 \cos 40^0 \cos 20^0}{\sin 80^0}.$$

Áp dụng công thức $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ với $0 \le \alpha \le 90^0$ (xem ví dụ 4).

Ta có: $\frac{OD}{OE} = \frac{2\sin 40^0 \cos 40^0}{\sin 80^0} = \frac{\sin 80^0}{\sin 80^0} = 1$

$\Rightarrow$ OED là tam giác cân đỉnh O. Do $\widehat{EOD} = \widehat{AOB} = 100^0$

$\Rightarrow \widehat{BED} = \frac{1}{2}(180^0 - 100^0) = 40^0$

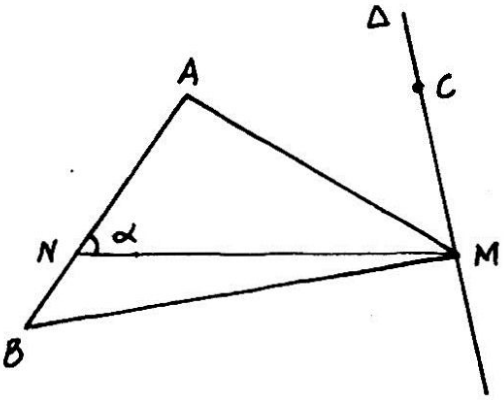
Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 25. Trên mặt phẳng cho ba điểm A, B, C cố định và Δ là một đường thẳng di động qua C. Ứng với mỗi vị trí của Δ, chọn M là điểm trên Δ sao cho đại lượng $3MB^2 + 2MA^2$ đạt giá trị bé nhất. Tìm quĩ tích của M.

BÀI GIẢI

Lấy N trên AB sao cho $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$ vậy N là điểm cố định.

Đặt $\widehat{ANM} = \alpha$, theo định lí hàm số cosin trong các tam giác ANM và BNM có:



$MA^2 = NA^2 + NM^2 - 2NA.NM\cos\alpha$,

$MB^2 = NB^2 + NM^2 - 2NB.NM\cos(180^0 - \alpha)$.

$\Rightarrow 3MB^2 + 2MA^2 =$

$= 3NB^2 + 2NA^2 + 5MN^2 - 2NM\cos\alpha\,(2NA - 3NB) \quad (1)$

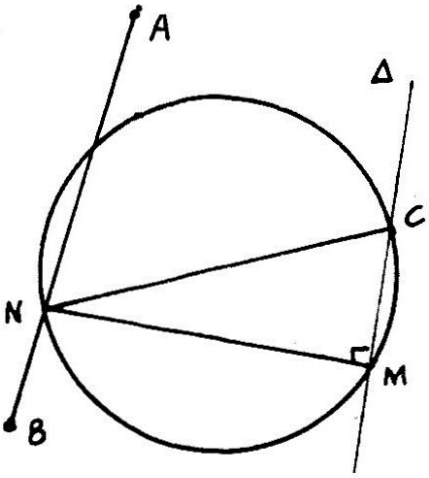
Do 2NA = 3NB nên từ (1) có:

$3MB^2 + 2MA^2 = 3NB^2 + 2NA^2 + 5MN^2 \quad (2)$

Do $3NB^2 + 2NA^2 = const$, vậy từ (2) suy ra:

$3MB^2 + 2MA^2$ đạt giá trị bé nhất $\Leftrightarrow$ MN min $\Leftrightarrow NM \perp \Delta$

Vậy M luôn nhìn NC cố định dưới góc 90^0.



$\Rightarrow$ Quỹ tích M là đường tròn đường kính NC.

Ví dụ 26. Cho ABC là tam giác không có góc tù. Gọi H là trực tâm tam giác.

Chứng minh rằng: $(AH + BH + CH)^2 \le a^2 + b^2 + c^2$

BÀI GIẢI

Xét hai khả năng sau:

1. Nếu ABC là tam giác vuông (thí dụ $A = 90^0$), khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$$(b + c)^2 \le a^2 + b^2 + c^2 \qquad (*)$$

(Thật vậy vì khi đó AH = 0, BH = c, CH = b).

$$(*) \quad \Leftrightarrow 2bc \le a^2$$

$$\Leftrightarrow 2bc \le b^2 + c^2 \qquad (1)$$

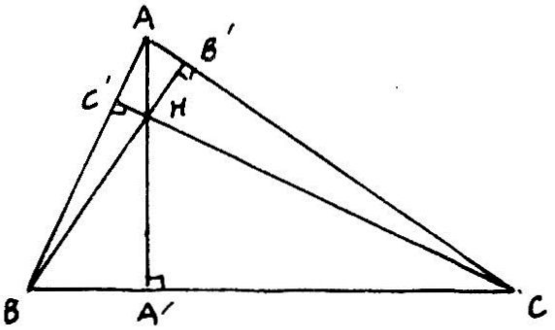
Do (1) đúng $\Rightarrow$ đ.p.c.m. Dấu bằng lúc này xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

2) Nếu ABC là tam giác nhọn. Gọi AA', BB', CC' là ba chiều cao. Theo hệ thức lượng với đường tròn ngoại tiếp tứ giác BC'HA' ta có:

$AH.AA' = AC'.AB = bc\cos A.$

Áp dụng định lí hàm số cosin ta có:

$$AH.AA' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$



Lý luận tương tự, có:

$$BH.BB' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \quad ; \qquad CH.CC' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \; AH.AA' + BH.BB' + CH.CC' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \qquad (9)$$

Theo định lí Seva, thì:

$$\frac{A'H}{AA'} + \frac{B'H}{BB'} + \frac{C'H}{CC'} = 1 \qquad \text{hay}$$

$$\frac{AH}{AA'} + \frac{BH}{BB'} + \frac{CH}{CC'} = 2 \qquad (10)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski và dùng (10) ta được:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \,.\, 2 \geq (AH + BH + CH)^2$$

Đó chính là đ.p.c.m. Dấu bằng có trong trường hợp này

AA' = BB' = CC' ⇔ ABC là tam giác đều.

Vậy dấu bằng có trong bất đẳng thức đề ra ⇔ ABC hoặc là tam giác vuông cân, hoặc là tam giác đều.

Ví dụ 27.

1. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}C = 2\text{cotg}B.$$ Chứng minh $B \le 60^0$.

2. Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện $b^2 = ac$. Chứng minh rằng tam giác ấy không thể có hai góc lớn hơn 60^0.

BÀI GIẢI

1. Áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng trong tam giác ABC, ta có từ giả thiết:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4S} = 2\frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$$

hay: $a^2 + c^2 = 2b^2$ (1)

Áp dụng định lí hàm số cosin ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) có: $\cos B = \dfrac{b^2}{2ac} \ge \dfrac{b^2}{a^2 + c^2} = \dfrac{1}{2}$.

(Do áp dụng bất đẳng thức $a^2 + c^2 \ge 2ac$)

Từ $\cos B \ge \frac{1}{2} \Rightarrow B \le 60^0 \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{cotg}A + \text{cotg}C = 2\text{cotg}B \\ a = c \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Không giảm tổng quát có thể giả sử :

$$a \le b \le c \Rightarrow A \le B \le C.$$

Áp dụng định lí hàm số cosin, ta có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Do $a^2 + c^2 \ge 2ac$, nên suy ra: $b^2 \ge 2ac(1 - \cos B)$.

Thay $b^2 = ac$, ta đi đến $1 \ge 2(1 - \cos B)$

$$\Rightarrow \cos B \ge \frac{1}{2} \Rightarrow B \le 60^0.$$

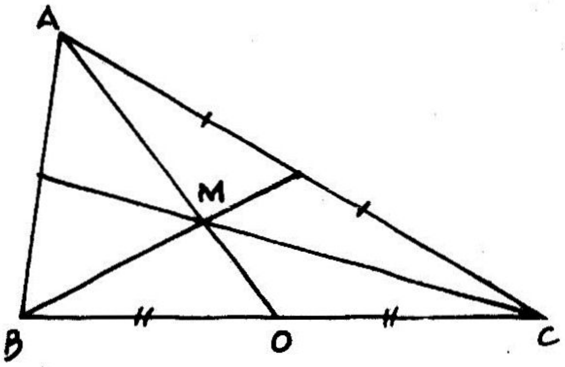
Vì $B \ge A \Rightarrow A \le 60^0$. Đó chính là đ.p.c.m..

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC có B, C cố định, còn A di động trên đường tròn tâm là trung điểm O của BC và bán kính r. Trong tam giác ABC lấy M sao cho:

$$\frac{BM}{\sin\widehat{AMC}} = \frac{AM}{\sin\widehat{BMC}} = \frac{CM}{\sin\widehat{AMB}}$$

Tìm quỹ tích của M.

BÀI GIẢI



Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{BM}{\dfrac{2S_{MAC}}{AM.CM}} = \frac{AM}{\dfrac{2S_{BMC}}{BM.CM}} = \frac{CM}{\dfrac{2S_{AMB}}{AM.BM}}$$

$$\Leftrightarrow S_{MAC} = S_{BMC} = S_{AMB} \text{ (và } = \frac{S}{3})$$

Gọi h'_a, h'_b, h'_c là khoảng cách từ M xuống BC, CA, AB thì từ (1) ta có : $h'_a = \frac{1}{3}h_a$, $h'_b = \frac{1}{3}h_b$, $h'_c = \frac{1}{3}h_c$,

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ $M \equiv G$, với G là trọng tâm của Δ ABC.

Từ đó suy ra : $OG = \frac{1}{3}OA = \frac{1}{3}r = \text{const}$. Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm O, bán kính $\frac{r}{3}$.

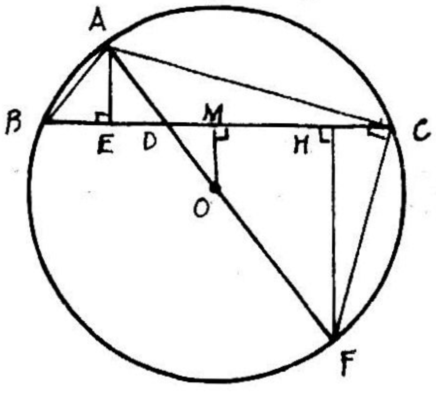
Ví dụ 29. Cho đường tròn tâm O cố định ngoại tiếp Δ ABC, trong đó A cố định, cạnh BC thay đổi nhưng ta luôn có $tgBtgC = \frac{1}{3}$.

Tìm quỹ tích trung điểm M của BC.

BÀI GIẢI

Kéo dài AO cắt đường tròn tại F. Giả sử AO cắt BC tại D. Kẻ OM và AE vuông góc với BC. Kẻ FH $\perp$ BC. Do AO = OF $\Rightarrow$ ME = MH. Vì MB = MC $\Rightarrow$ BE = BH.

Ta có $tgBtgC = \frac{1}{3} \Leftrightarrow tgB.tg\widehat{HFC} = \frac{1}{3}$



$$\frac{AE}{BE}.\frac{HC}{FH} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow HF = 3AE$

$\Leftrightarrow DF = 3AD$

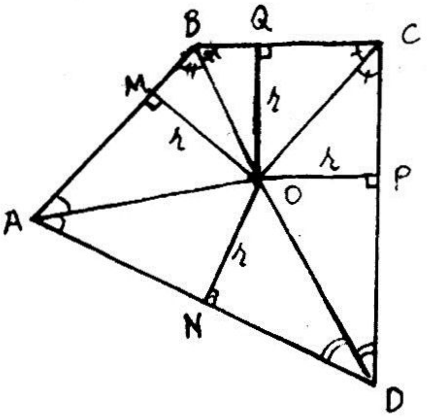
$\Leftrightarrow DA = DO$

Vậy D cố định ⇒ Quỹ tích của M là đường tròn đường kính DO.

Ví dụ 30. Cho ABCD vừa là tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp. Gọi S và p tương ứng là diện tích và nửa chu vi của tứ giác. Chứng minh :

$$S = p^2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2}\right)^{-1}$$

BÀI GIẢI



Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp và r là bán kính của nó. Ta có:

$$p = AM + BQ + CP + DN =$$

$$= r\,(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{D}{2})$$

Vì ABCD là tứ giác nội tiếp nên:

$A + C = B + D = 180^0$.

$$\Rightarrow \qquad p = r\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2}\right) \qquad \text{hay}$$

$$r = p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2}\right)^{-1}$$

Do $S = pr$ ⇒ $$S = p^2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2}\right)^{-1}$$

⇒ đ.p.c.m..

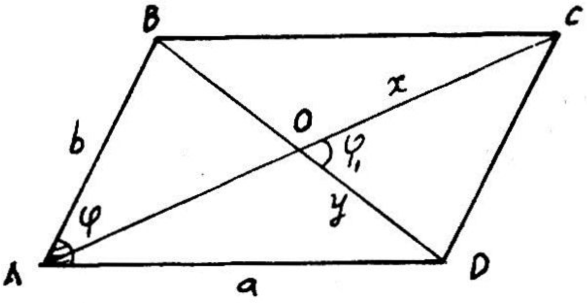
Ví dụ 31. Cho hình bình hành với hai cạnh a, b (a >b). Hai đường chéo 2x, 2y (x > y). Gọi φ là góc nhọn của hình bình hành, và φ_1 là góc nhọn giữa hai đường chéo. Chứng minh:

1. $$\cos\varphi\cos\varphi_1 = \frac{(x^2 - y^2)(a^2 - b^2)}{4abxy}$$

2. $$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2ab\sin\varphi}{a^2 - b^2}$$

BÀI GIẢI

1) Áp dụng định lí hàm số cosin trong các Δ COD và ABD, ta có:



$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi_1$ (1)

$4y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$ (2)

Từ (1) suy ra: $2xy\cos\varphi_1 = x^2 + y^2 - b^2$ và từ (2) có:

$$2ab\cos\varphi = a^2 + b^2 - 4y^2 \Rightarrow 4abxy\cos\varphi\cos\varphi_1$$
$$= (x^2 + y^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 4y^2) \quad . \qquad (3)$$

Theo hệ thức lượng trong hình bình hành ta có :

$$4x^2 + 4y^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - b^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - b^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} \qquad (4)$$

$$a^2 + b^2 - 4y^2 = 2(x^2 + y^2) - 4y^2 = 2(x^2 - y^2) \qquad (5)$$

Thay (4) (5) vào (3) có:

$4abxy\cos\varphi\cos\varphi_1 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

$$\Rightarrow \cos\varphi\cos\varphi_1 = \frac{(a^2-b^2)(x^2-y^2)}{4abxy} : \text{đ.p.c.m..}$$

2/ Áp dụng định lí hàm số cosin suy rộng trong tam giác COD, ta có: $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{4S_{COD}}{x^2+y^2-b^2} = \dfrac{S_{ABCD}}{\dfrac{a^2-b^2}{2}} = \dfrac{2ab\sin\varphi}{a^2-b^2} \Rightarrow$ đ.p.c.m..

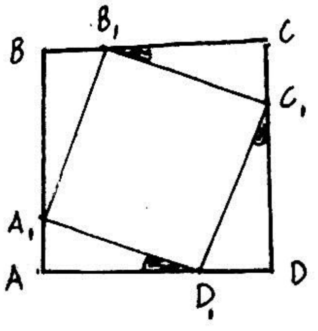
Ví dụ 32. Cho hình vuông ABCD. Nội tiếp trong hình vuông một hình chữ nhật sao cho mỗi đỉnh của hình chữ nhật nằm trên một cạnh của hình vuông. Chứng minh rằng hình chữ nhật nội tiếp hoặc là hình vuông, hoặc các cạnh của nó tương ứng song song với các đường chéo của hình vuông.

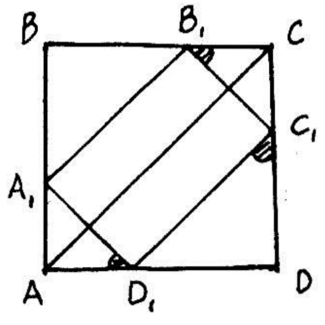
BÀI GIẢI

Đặt $\widehat{AD_1A_1} = \widehat{D_1C_1D} = \widehat{C_1B_1C} = \alpha$

Đặt $A_1B_1 = a$,

$A_1D_1 = b$





Khi đó ta có:

$AD = AD_1 + D_1D$

$= b\cos\alpha + a\sin\alpha$

$DC = DC_1 + C_1C = a\cos\alpha + b\sin\alpha$

Do $AD = DC \Rightarrow b\cos\alpha + a\sin\alpha = a\cos\alpha + b\sin\alpha$

$\Rightarrow (a - b)(\sin\alpha - \cos\alpha) = 0$ (1)

Từ (1) suy ra hoặc $a - b = 0$, hoặc $\sin\alpha - \cos\alpha = 0$,

tức là hoặc $a = b$, hoặc $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

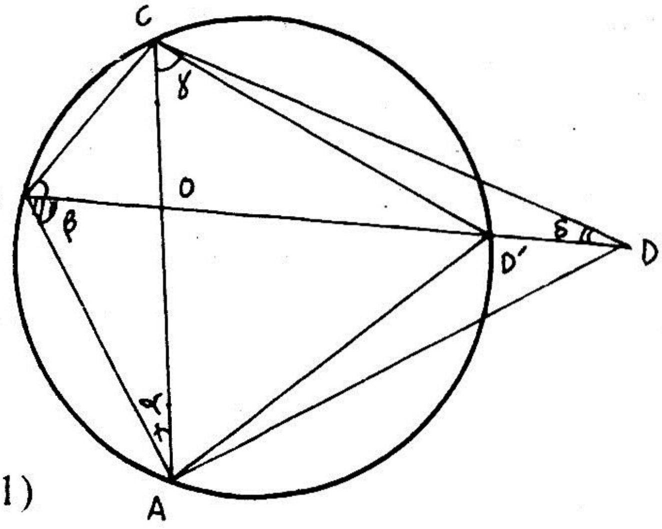
Nghĩa là $A_1B_1C_1D_1$ hoặc là hình vuông (khi a = b), hoặc có cạnh song song với đường chéo của hình vuông (khi $\alpha = 45^0$) đ.p.ç.m..

Ví dụ 33. Cho tứ giác ABCD, có $\widehat{B} + \widehat{D} < \widehat{A} + \widehat{C}$. Gọi R_1, R_2, R_3, R_4 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các Δ ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh $R_1R_3 < R_2R_4$.

BÀI GIẢI

Đặt $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABD}$, $\gamma = \widehat{ACD}$, $\delta = \widehat{BDC}$

Áp dụng định lí hàm số sin trong các Δ ABC, BCD, CDA, DAB ta có:



$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \; R_2 = \frac{BC}{2\sin\delta}$$

$$R_3 = \frac{AD}{2\sin\gamma}, \; R_4 = \frac{AD}{2\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1R_3}{R_2R_4} = \frac{\sin\beta\sin\delta}{\sin\alpha\sin\gamma} \quad (1)$$

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Theo định lí hàm số sin trong các Δ OAB, OCD ta lại có:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad ; \quad \frac{OC}{OD} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{R_1R_3}{R_2R_4} = \dfrac{OA.OC}{OB.OD}$ (3)

Vẽ đường tròn ngoại tiếp Δ ABC, và giả sử nó cắt BD tại D'. Do B + D < A + C , nên D' nằm trong đoạn BD. Theo hệ thức lượng trong đường tròn ta có:

$$OA \,.\, OC = OB \,.\, OD'$$

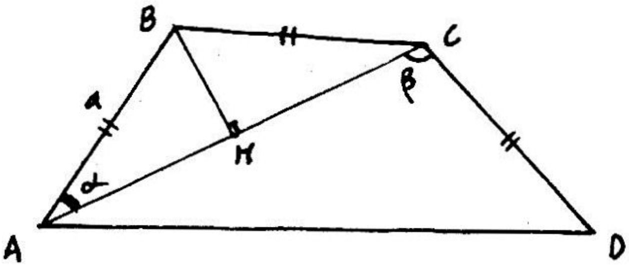
Rõ ràng: $OB.OD > OB.OD' \Rightarrow OB.OD > OA.OC$ (4)

Từ (3) và (4) ta được $\frac{R_1R_3}{R_2R_4} < 1 \Leftrightarrow R_1R_3 < R_2R_4$ và đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 34. Cho tứ giác ABCD có ba cạnh AB = BC = CD = a.

Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \le \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

BÀI GIẢI



Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACD} = \beta$

Khi đó $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$

$= \frac{1}{2}AC.BH + \frac{1}{2}AC.CD\sin\beta$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le AH.BH + AH.CD$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le a\cos\alpha.\ a\sin\alpha + a^2\cos\alpha = a^2\cos\alpha\,(1+\sin\alpha)$

Vậy: $S^2_{ABCD} \le a^4\cos^2\alpha\,(1+\sin\alpha)^2$ (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \sin\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 90^0$.

Ta có: $\cos^2\alpha\,(1+\sin\alpha)^2 = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^3$

$= \frac{1}{3}(3-3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^3$ (2)

Do: $3 - 3\sin\alpha > 0$, $1 + \sin\alpha > 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi có :

$$\sqrt[4]{(3-3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^3} \le$$

$$\le \frac{(3-3\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)}{4}$$

$$\Leftrightarrow (3 - 3\sin\alpha)(1 + \sin\alpha)^3 \le \left(\frac{3}{2}\right)^4 \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra :

$$S^2_{ABCD} \le \frac{27a^4}{16}, \text{ hay } \quad S_{ABCD} \le \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Đó là đ.p.c.m..

Dấu bằng trong (4) xảy ra ⇔ đồng thời có dấu bằng trong (1) và (3):

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 90^0 \\ 3 - 3\sin\alpha = 1 + \sin\alpha\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 90^0 \\ \alpha = 30^0\end{cases}$$

⇔ ABCD là nửa lục giác đều cạnh bằng a.

Ví dụ 35: Cho ABCD là tứ giác lồi. Gọi R_a, R_b, R_c, R_d tương ứng là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác DAB, ABC, BCD và CDA. Chứng minh rằng: $R_a + R_c \le R_b + R_d$ khi và chỉ khi A + C > B + D.

BÀI GIẢI

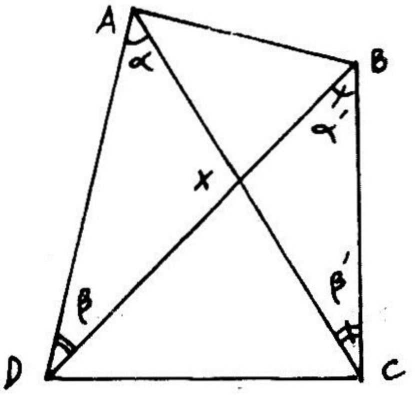
Giả sử AC cắt BD tại X. Trong hai góc $\widehat{AXD}$ và $\widehat{AXB}$ có ít nhất một góc ≥ 90^0, không giảm tổng quát giả sử $\widehat{AXD} \ge 90^0$.

Đặt $\widehat{CAD} = \alpha$, $\widehat{CBD} = \alpha'$

$\widehat{ADB} = \beta$, $\widehat{ACB} = \beta'$.

Rõ ràng ta có: $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$

(vì cùng bù $\widehat{AXD}$)

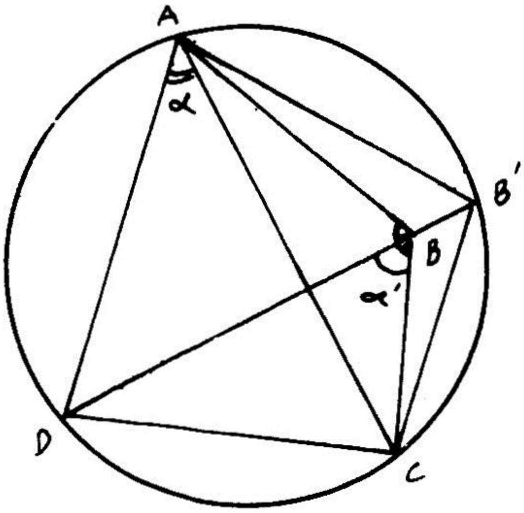


Chú ý rằng do $\widehat{AXD} \ge 90^0 \Rightarrow \alpha, \beta$ đều là các góc nhọn. Theo định lí hàm số sin trong các Δ DAB, ABC, BCD, CDA ta có:

$$R_a = \frac{AB}{2\sin\beta} \quad ; \quad R_b = \frac{AB}{2\sin\beta'} \ ;$$

$$R_c = \frac{CD}{2\sin\alpha'} \quad ; \quad R_d = \frac{CD}{2\sin\alpha} \ .$$

Xét các khả năng sau:



1. Nếu A + C = B + D (và do đó bằng 180^0) $\Rightarrow$ ABCD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

$\Rightarrow R_a + R_c = R_b + R_d$.

2. Nếu A+C < B+D $\Rightarrow$ B+D > 180^0. Vẽ đường tròn ngoại tiếp Δ ADC, và giả sử nó cắt BD tại B'

$\Rightarrow D + \widehat{AB'C} = 180^0 \Rightarrow B > \widehat{AB'C} \Rightarrow$ B nằm bên trong đường tròn $\Rightarrow$ $\alpha' > \alpha$ và như vậy $\beta' < \beta$.

Do α, α', β' β đều là góc nhọn mà $\alpha' > \alpha$, $\beta > \beta'$. $\Rightarrow$

$$\frac{CD}{2\sin\alpha} > \frac{CD}{2\sin\alpha'} \text{ và } \frac{AB}{2\sin\beta'} > \frac{AB}{2\sin\beta} .$$

$\Rightarrow \quad R_a + R_c < R_b + R_d$.

3. Nếu A + C > B + D. Lý luận như phần **2**, ta có:

$R_a + R_c < R_b + R_d$. Tóm lại: $R_a + R_c > R_b + R_d$

$\Leftrightarrow \quad A + C > B + D \quad \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 36. Cho hình bình hành ABCD. Từ B và D kẻ BE và DE sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{EDC} = \alpha$. Chứng minh: $\widehat{BEA} = \widehat{CED}$.

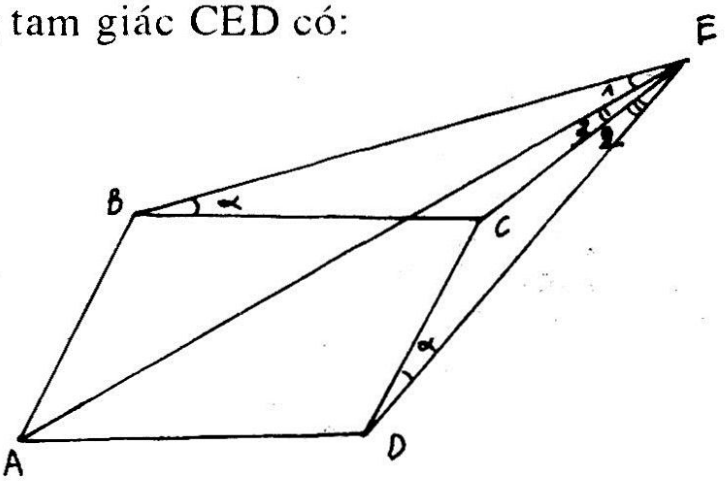
BÀI GIẢI

Theo định lí hàm số sin trong tam giác CED có:

$$\frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{CD}{\sin E_2} \quad (1).$$

Trong tam giác EBC theo định lí hàm số sin thì

$$\frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(E_1 + E_3)} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BC}{\sin(E_1 + E_3)} = \dfrac{CD}{\sin E_2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{CD} = \frac{\sin(E_1 + E_3)}{\sin E_2} \qquad (3)$$

Trong Δ ABE có:

$$\frac{AB}{\sin E_1} = \frac{AD}{\sin(E_2 + E_3)} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{\sin(E_2 + E_3)}{\sin E_1} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) có: $$\frac{\sin(E_1 + E_3)}{\sin E_2} = \frac{\sin(E_2 + E_3)}{\sin E_1} \qquad (5)$$

Chú ý là: $0 < E_1 + E_2 + E_3 < 90^0$. (6)

Giả thiết phản chứng $E_1 \neq E_2$, do đó có thể coi $E_1 > E_2$ (vì nếu không lý luận hoàn toàn tương tự). Do $E_1 > E_2$ nên có (kết hợp với (6)) :

$$\sin(E_1 + E_3) > \sin(E_2 + E_3) > 0$$

$$\sin E_1 > \sin E_2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(E_1 + E_3)}{\sin E_2} > \frac{\sin(E_2 + E_3)}{\sin E_1}.$$

Theo (5) suy ra vô lý. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

$\Rightarrow$ $E_1 = E_2$, tức là $\widehat{BEA} = \widehat{CEA}$ $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

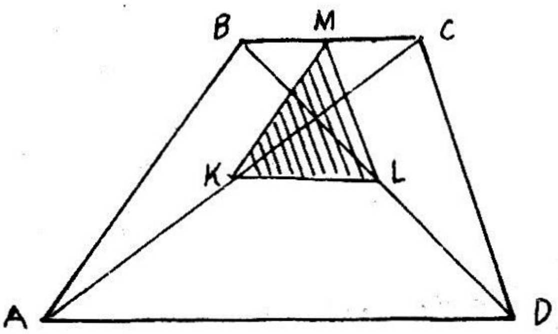
Ví dụ 37. (Định lí hàm số cosin thứ nhất với tứ giác)

Cho tứ giác lồi ABCD, trong đó $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCD} = \gamma$. Chứng minh rằng:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab\cos\beta - 2bc\cos\gamma + 2ac\cos(\beta + \gamma)$$

BÀI GIẢI

Gọi K, L tương ứng là trung điểm của AC và BD và M là trung điểm của BC. (Chỉ xét khi $K \neq L$, tức là khi ABCD không phải là hình bình hành, vì nếu ABCD là hình bình hành ta có $\beta + \gamma = 180^0$; $a = c$, $b = d$ và kết luận trên là điều hiển nhiên).



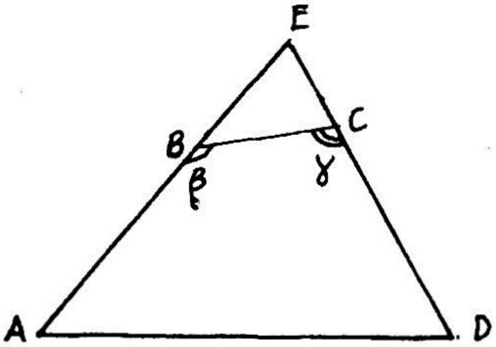
Có hai khả năng xảy ra:

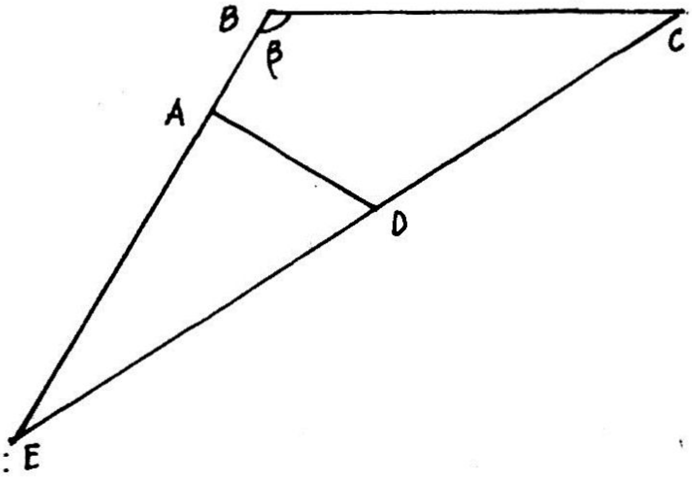
1. *Nếu AB không song song với CD*

Giả sử $AB \cap CD = E \Rightarrow \widehat{KML} = \widehat{AED}$

Với trường hợp AB cắt CD về phía trên ta có:

$$\widehat{AED} = 180^0 - [(180^0 - \beta) + (180^0 - \gamma)] = \beta + \gamma - 180^0$$





Khi AB cắt CD về phía dưới ta có :

$$\widehat{AED} = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

Trong cả hai trường hợp đều có :

$$\cos \widehat{AED} = -\cos(\beta + \gamma)$$

Trong tam giác MKL theo định lí hàm số cosin ta có:

$$KL^2 = MK^2 + ML^2 - 2MK.ML\cos KML$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + 2\,\frac{a}{2}\frac{c}{2}\cos\left(\beta + \gamma\right)$$

$$KL^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{ac}{2}\cos\left(\beta + \gamma\right) \qquad (1)$$

Theo công thức Euler với tứ giác, ta có:

$$KL^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2\right) \qquad (2)$$

với e = AC, f = BD. Thay (2) vào (1) có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(\beta + \gamma) \qquad (3)$$

Lại áp dụng định lí hàm số cosin, ta có:

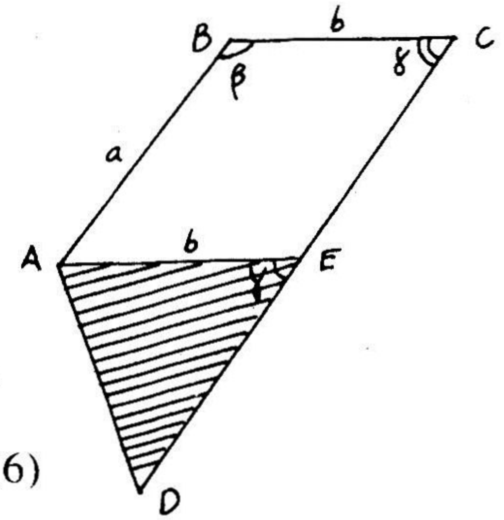
$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \qquad (4)$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \qquad (5)$$

Thay (4) (5) vào (3) có:

$$d^2 = e^2 + f^2 - b^2 + 2ac\cos(\beta + \gamma)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\beta - 2bc\cos\gamma + 2ac\cos(\beta + \gamma)$$



2. *Nếu AB // CD*. Khi đó $\beta + \gamma = 180^0$. Vậy đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2\cos\beta(ab - bc) - 2ac$$

$$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b\cos\beta(a - c) - 2ac \quad (6)$$

Thật vậy kẻ AE // BC, ta có theo định lí hàm số cosin trong Δ AED có: $d^2 = b^2 + (c - a)^2 - 2b(c - a)\cos\gamma$

$$= b^2 + c^2 + a^2 - 2b(a - c)\cos\beta - 2ac, \text{ vậy (6) đúng.}$$

Đó chính là đ.p.c.m..

Chú ý: Nhắc lại công thức Euler sau đây:

Cho tứ giác ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f. Gọi K và L là trung điểm của AC và BD. Khi đó ta có:

$$KL^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2\right)$$

*Chứng minh công thức Euler như sau: Xét tam giác ALC, ta có theo công thức tính trung tuyến (xem ví dụ **5**) :*

$$KL^2 = \frac{2LC^2 + 2LA^2 - AC^2}{4}$$

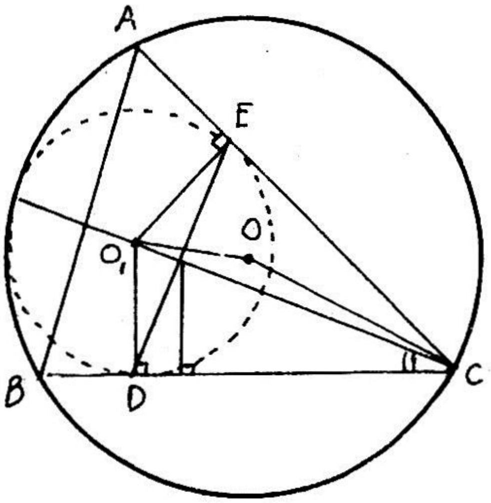
Lại theo công thức ấy, thì có :

$$KL^2 = \frac{2.\frac{2BC^2 + 2CD^2 - BD^2}{4} + 2\frac{2AB^2 + 2AD^2 - BD^2}{4} - AC^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2\right) \text{ và đó là đ.p.c.m..}$$

Ví dụ 38. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của Δ ABC với bán kính r. Vẽ đường tròn tâm O_1 tiếp xúc với BC tại D, AC tại E và tiếp xúc trong với đường tròn (O,R). Chứng minh rằng I là trung điểm của DE.

BÀI GIẢI



Gọi O_1 và ρ là tâm và bán kính đường tròn tiếp xúc với CB, CA và tiếp xúc trong với đường tròn (O,R). Khi đó C, I, O_1 thẳng hàng vì chúng cùng nằm trên đường phân giác trong của góc C. Do đó ta có:

$$CI = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}} \text{ và } CO_1 = \frac{\rho}{\sin\frac{C}{2}} \quad (*)$$

Đặt $\widehat{O_1CO} = \varphi$. Trong tam giác COI theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$\cos\varphi = \frac{CO^2 + CI^2 - OI^2}{2CI.CO}$$

Theo công thức Euler ta có: $OI^2 = R(R - 2r)$, vậy :

$$\cos\varphi = \frac{R^2 + \dfrac{r^2}{\sin^2\dfrac{C}{2}} - R(R-2r)}{2\dfrac{rR}{\sin\dfrac{C}{2}}} = \frac{r^2 + 2rR\sin^2\dfrac{C}{2}}{2rR\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{r + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}} \qquad (1)$$

Lại áp dụng định lí hàm số cosin trong Δ COO_1 ta có:

$$\cos\varphi = \frac{CO^2 + CO_1^2 - OO_1^2}{2CO.CO_1} = \frac{R^2 + \dfrac{\rho^2}{\sin^2\dfrac{C}{2}} - (R-\rho)^2}{2R.\dfrac{\rho}{\sin\dfrac{C}{2}}}$$

$$= \frac{\rho^2 - \rho^2\sin^2\dfrac{C}{2} + 2R\rho\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\rho\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{\rho\cos^2\dfrac{C}{2} + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{r + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{\rho\cos^2\dfrac{C}{2} + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad r = \rho\cos^2\frac{C}{2} \qquad \Rightarrow \quad \frac{r}{\rho} = \cos^2\frac{C}{2}. \qquad (3)$$

Theo (*) ta có $IO_1 = CO_1 - CI = \dfrac{\rho - r}{\sin\dfrac{C}{2}}$

Vậy: $$\frac{IO_1}{CO_1} = \frac{\rho - r}{\rho} = 1 - \frac{r}{\rho} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\frac{IO_1}{CO_1} = \sin^2\frac{C}{2} = \frac{\rho^2}{CO_1^2} \Rightarrow IO_1 . CO_1 = \rho^2 = O_1D^2$$

Trong tam giác vuông O_1DC tại D, lại có: $IO_1.CO_1 = O_1D^2$

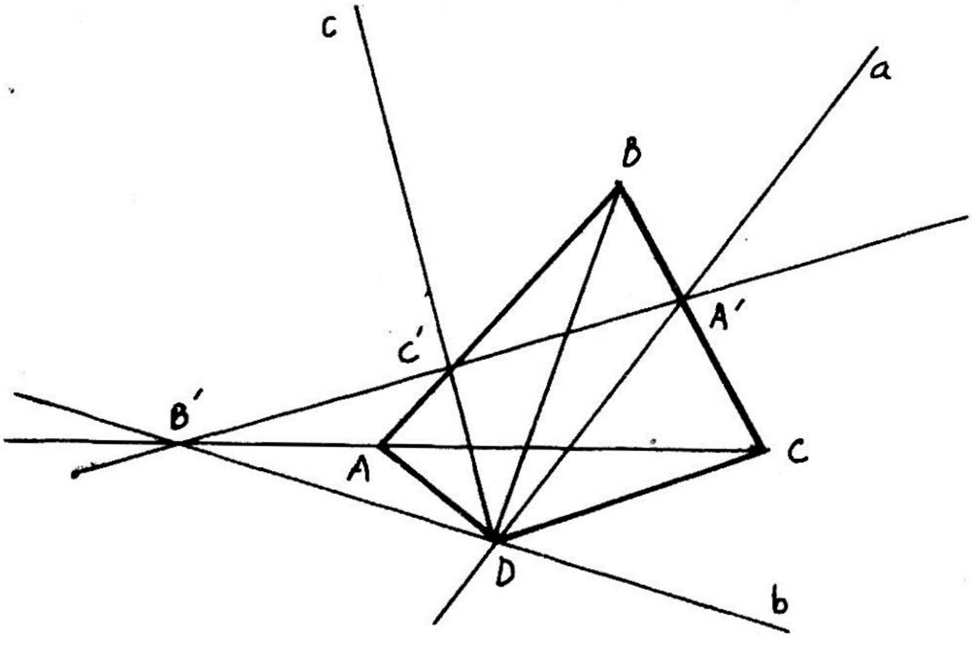
$\Rightarrow$ $DI \perp O_1C$, mà $DE \perp O_1C \Rightarrow$ D, I, E thẳng hàng.

Vậy vì CE và CD là hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm tới đường tròn tâm O_1 bán kính ρ, ta có I là trung điểm của CE

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 39. Cho tứ giác lồi ABCD. Qua đỉnh D của tứ giác kẻ đường thẳng $a \perp DA$, $b \perp DB$, $c \perp DC$. Các đường thẳng a, b, c này theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

BÀI GIẢI



Ta có hai tam giác DA'B và DA'C chung đỉnh và chung đường thẳng đáy đối diện, nên:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{S_{DA'B}}{S_{DA'C}} \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$\frac{S_{DA'B}}{S_{DA'C}} = \frac{\frac{1}{2}DB.DA'\sin\widehat{BDA'}}{\frac{1}{2}DC.DA'\sin\widehat{CDA'}} = \frac{DB}{DC}.\frac{\sin\widehat{BDA'}}{\sin\widehat{CDA'}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $$\frac{A'B}{A'C} = \frac{DB}{DC}.\frac{\sin\widehat{BDA'}}{\sin\widehat{CDA'}} \qquad (3)$$

Lý luận hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{DC}{DA}.\frac{\sin\widehat{CDB'}}{\sin\widehat{ADB'}} \qquad (4)$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{\sin\widehat{ADC'}}{\sin\widehat{BDC'}}.\frac{DA}{DB} \qquad (5)$$

Nhân từng vế (3) (4) (5) suy ra:

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = \frac{\sin\widehat{BDA'}.\sin\widehat{CDB'}.\sin\widehat{ADC'}}{\sin\widehat{CDA'}.\sin\widehat{ADB'}.\sin\widehat{BDC'}} \qquad (6)$$

Theo tính chất các góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta có:

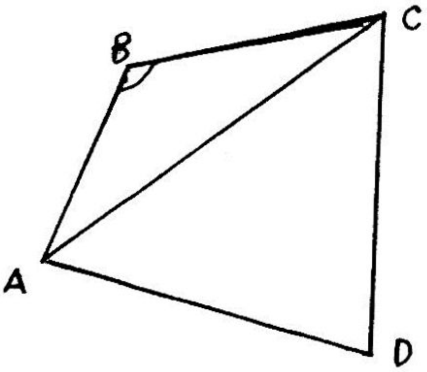
$\sin\widehat{BDA'} = \sin\widehat{ADB'}$; $\sin\widehat{CDB'} = \sin\widehat{BDC'}$ và $\sin\widehat{ADC'} = \sin\widehat{CDA'}$ (7).
Thay (7) vào (6) có :

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1 \qquad (8)$$

Từ (8) và theo định lí Mênêlaúyt đảo, suy ra A', B', C' thẳng hàng.

Ví dụ 40. Chứng minh rằng tỷ số khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh với khoảng cách bé nhất giữa hai đỉnh của một tứ giác bất kỳ không bé hơn $\sqrt{2}$.

BÀI GIẢI



Giả sử **M**, **m** tương ứng là khoảng cách lớn nhất và bé nhất giữa hai đỉnh của một tứ giác lồi. Vì ít nhất một trong các góc của tứ giác không phải là góc nhọn (ví dụ $\widehat{ABC}$).

Khi đó ta có theo định nghĩa số M, và định lí hàm số cosin

$$M^2 \geq AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.\,BC\cos\widehat{ABC}.$$

$$\text{Vì } \cos\widehat{ABC} \leq 0 \Rightarrow M^2 \geq AB^2 + BC^2 \geq m^2 + m^2 = 2m^2$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} \geq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{đ.p.c.m..}$$

Ví dụ 41. Cho tam giác đều ABC, và P là một điểm trong bất kỳ của tam giác, AP, BP, PC cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 tương ứng. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$A_1B_1.\,B_1C_1.\,C_1A_1 \geq A_1B.\,B_1C.\,C_1A$$

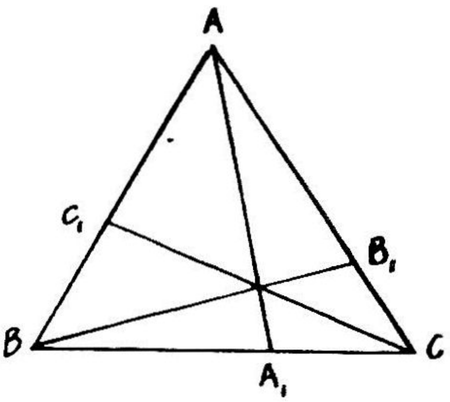
BÀI GIẢI

Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác CA_1B_1, ta có:

$$A_1B_1^{\ 2} = A_1C^2 + B_1C^2 - 2A_1C.\,B_1C\cos C.$$

Do $\cos C = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \quad A_1B_1^{\ 2} = A_1C^2 + B_1C^2 - A_1C.\,B_1C \qquad (1)$$



Áp dụng bất đẳng thức hiển nhiên sau: $\forall x$, $\forall y$ luôn có $x^2+y^2 - xy \geq xy$. Và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x= y$

$$\Rightarrow A_1C^2 + B_1C^2 - A_1C.\ B_1C \geq A_1C.\ B_1C \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $A_1B_1{}^2 \geq A_1B.\ B_1C$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow A_1C = B_1C$.

Lý luận hoàn toàn tương tự ta có:

$$A_1C_1{}^2 \geq A_1B.\ C_1B \quad (4)$$

$$B_1C_1{}^2 \geq B_1A.\ C_1A \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow BA_1= BC_1$ và dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow B_1A = C_1A$. Nhân từng vế (3) (4) (5) có:

$$A_1B_1{}^2.\ B_1C_1{}^2\ .\ C_1A_1{}^2 \geq A_1B.\ B_1C.\ C_1A.\ A_1C.\ C_1B.\ B_1A \quad (6)$$

Do AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, nên theo định lí Xeva có:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{A_1C}{C_1B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad A_1C.\ C_1B.\ B_1A = A_1B.\ B_1C.\ C_1A \quad (7)$$

Thay (7) vào (6) và sau khi khai căn bậc hai cả hai vế, ta thu được:

$$A_1B_1.\ B_1C_1.\ C_1A_1 \ \geq\ A_1B.\ B_1C.\ C_1A \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5).

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} CA_1 = CB_1 \\ BC_1 = BA_1 \\ AC_1 = AB_1 \end{cases} \quad (*)$$

Do AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, nên (*) ⇔ P là tâm của ΔABC. Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 42. Chứng minh rằng nếu trong tam giác **ABC thoả mãn** hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} = a^2 \\ a = 2b\cos C, \end{cases}$$

thì đó là tam giác đều.

BÀI GIẢI

Từ điều kiện thứ nhất suy ra:

$$a^3 - b^3 - c^3 = a^3 - a^2(b + c), \text{ hay } b^3 + c^3 = a^2(b + c).$$

$$\Rightarrow \quad (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$$

$$\Rightarrow \quad b^2 - bc + c^2 = a^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Áp dụng định lí hàm số cosin, từ (1) có:

$$b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0 \qquad \textbf{(2)}$$

Từ $a = 2b\cos C \Rightarrow a^2 = 2ba\cos C$ **(3)**

Lại áp dụng định lý hàm số cosin, thì từ (3) **suy ra:**

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow \quad b = c \qquad \textbf{(4)}$$

Từ (2) (4) ta đi đến ABC là tam giác đều ⇒ **đ.p.c.m..**

Ví dụ 43. Chứng minh rằng nếu trong tam giác **ABC thoả** mãn hệ thức $\dfrac{1 + \cos B}{\sin B} = \dfrac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$, thì đó là tam giác cân.

BÀI GIẢI

Do cả hai vế của đẳng thức đã cho đều dương nên từ giả thiết ta có:

$$\frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

Do $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$, nên từ đẳng thức trên suy ra:

$$\frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} \Rightarrow 1 + \frac{2\cos B}{1-\cos B} = 1 + \frac{2c}{2a-c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\cos B}{1-\cos B} = \frac{2c}{2a-c}$$

$$\Rightarrow 2a\cos B = c \Rightarrow 2ac\cos B = c^2 .$$

Theo định lí hàm số cosin, thì $2ac.\cos B = a^2 + c^2 - b^2$, vậy từ (1) có : $a^2 + c^2 - b^2 = c^2$ hay $a = b$

$\Rightarrow$ ABC là tam giác cân đỉnh C $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 44. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AC. Đặt $\widehat{MBC} = \varphi$. Chứng minh rằng: $\cot gA \geq \dfrac{2\sqrt{2} - 3\cos\varphi}{\sin\varphi}$

BÀI GIẢI

Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng sau:

$$\cot gA + 3\cot g\varphi \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi} \qquad (1)$$

Áp dụng định lí hàm cosin suy rộng trong các tam giác ABC và MBC (với chú ý $S_{MBC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}S$), ta có:

$$\cot gA + 3\cot g\varphi = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + 3.\frac{a^2+m_b^2-MC^2}{4.\frac{S}{2}}$$

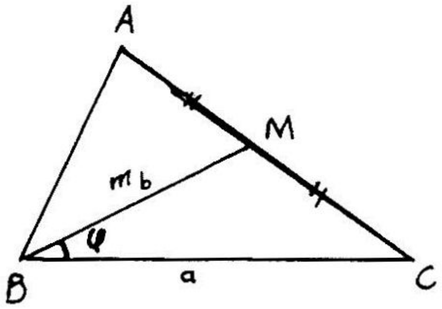
Áp dụng công thức đường trung tuyến, ta có:

$$\text{cotg}A + 3\text{cotg}\varphi = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + 3.\frac{a^2+\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{4}-\dfrac{c^2}{4}}{2S}$$

$$= \frac{4a^2+2c^2-b^2}{2S}$$

$$= \frac{2a^2+\left(2a^2+2c^2-b^2\right)}{2S}$$

$$= \frac{2a^2+4m_b^2}{2S} = \frac{a^2+2BM^2}{S} \qquad (2)$$



Theo bất đẳng thức Cosi suy ra: $a^2 + 2BM^2 \geq 2a.\ BM\sqrt{2}$

Ngoài ra có: $S = 2\ S_{MBC} = BM.a.\ \sin\varphi$

Vậy từ (2) có: $\text{cotg}\ A + 3\text{cotg}\varphi \geq \dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$

Vậy (1) đúng. Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = 2BM^2$

$$\Leftrightarrow a = m_b\sqrt{2}$$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 45. Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng có thể lấy asinA, bsinB, csinC là số đo ba cạnh của tam giác.

BÀI GIẢI

Điều cần chứng minh tương đương với việc chứng minh đồng thời ba bất đẳng thức sau;

$$b\sin B + c\sin C > a\sin A \qquad (1)$$

$$a\sin A + c\sin C > b\sin B \qquad (2)$$

$$a\sin A + b\sin B > c\sin C \qquad (3)$$

Do vai trò của (1) (2) (3) là như nhau, nên ta chỉ cần chứng minh chẳng hạn (3) là đúng. Thật vậy do ABC là tam giác nhọn nên $\cos C > 0$. Áp dụng định lí hàm số cosin có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c < a^2 + b^2.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c^2}{2R} < \frac{a^2}{2R} + \frac{b^2}{2R} \qquad (*)$$

Theo định lí hàm số sin ta có : $\frac{a}{2R} = \sin A$; $\frac{b}{2R} = \sin B$;

$\frac{c}{2R} = \sin C$; vậy từ (*) ta có : $c\sin C < a\sin A + b\sin B$.

Vậy (3) đúng $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

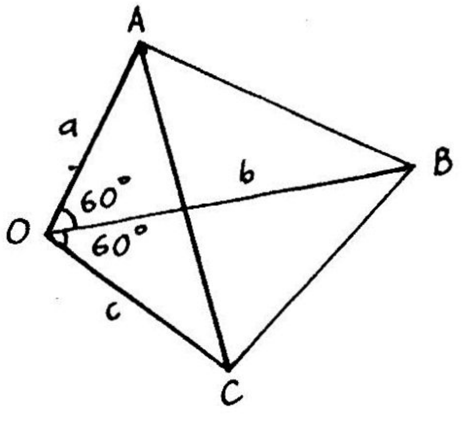
Ví dụ 46. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

BÀI GIẢI

Đặt OA = a, OB = b, OC = C

với $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60^0$.



Theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^0 = a^2 + b^2 - ab$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^0 = b^2 + c^2 - bc$$

$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 120^0 = a^2 + c^2 + ac$$

Vậy bất đẳng thức đã cho có dạng tương đương sau:

$$AB + BC \geq AC \qquad (1)$$

Vì (1) hiển nhiên đúng ⇒ bất đẳng thức đã cho là đúng.

⇒ đ.p.c.m..

Dấu bằng xảy ra ⇔ A, B, C thẳng hàng.

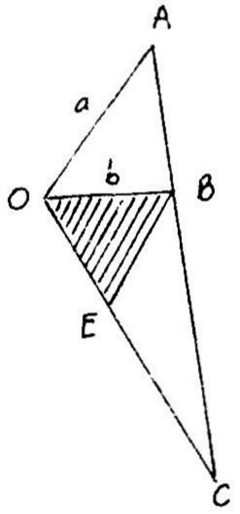
Kẻ BE//OA ⇒ OBE là tam giác đều cạnh a. Theo định lí Talet, có:

$$\frac{BE}{OA} = \frac{CE}{CO} \quad \text{hay} \quad \frac{b}{a} = \frac{c-b}{c}$$

$$\Rightarrow bc = ac - ab$$

$$\Rightarrow bc + ab = ac$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}.$$



Vậy dấu bằng xảy ra ⇔ $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$.

Ví dụ 47. Cho tam giác ABC, trong đó trung tuyến AA_1, **phân** giác CC_1 và đường cao BB_1 đồng quy.

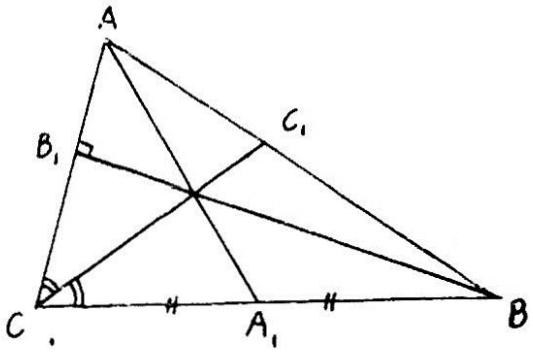
Chứng minh rằng: $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab^2}{a+b}$.

BÀI GIẢI

Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác ABC, có

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (1)

Do AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên theo định lí Xêva ta có:



$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \qquad (2)$$

Do AA_1 là trung tuyến nên $\frac{CA_1}{A_1B} = 1$, và do CC_1 là phân giác, nên

ta có: $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$.

Vậy từ (2) suy ra: $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{b}{a}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB_1 + B_1C}{B_1C} = \frac{b+a}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{B_1C} = \frac{b+a}{a} \qquad \Rightarrow \quad B_1C = \frac{ab}{a+b}$$

Ta có: $\cos C = \frac{B_1C}{a} = \frac{ab}{a+(a+b)} = \frac{b}{a+b}$ (3)

Thay (3) vào (1), có : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\frac{b}{a+b}$

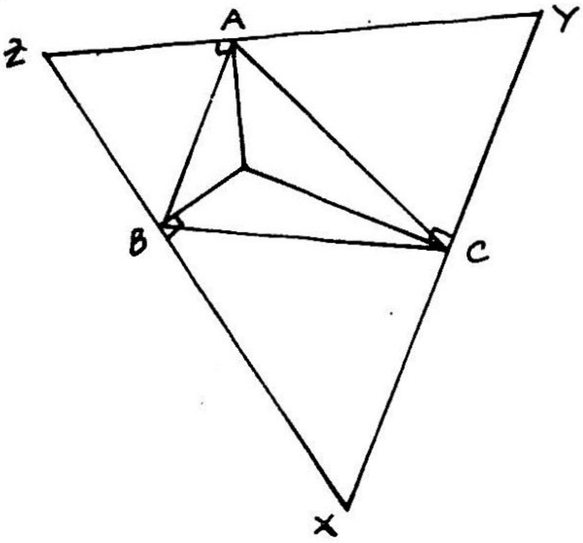
$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab^2}{a+b}.$$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 48. Cho tam giác ABC và I là một điểm nằm trong tam giác. Đặt $\widehat{BIC} = \alpha$, $\widehat{CIA} = \beta$, $\widehat{AIB} = \gamma$. Chứng minh rằng với mọi vị trí của M nằm trong mặt phẳng chứa tam giác, ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \geq IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma.$$

BÀI GIẢI



Qua A, B, C vẽ lần lượt ba đường thẳng tương ứng vuông góc với IA, IB, IC. Ba đường này cắt nhau tại X, Y, Z (xem hình vẽ).

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ, khi ấy theo định lý hàm số sin, ta có trong Δ XYZ:

$$\sin X = \frac{YZ}{2R};\ \sin Y = \frac{ZX}{2R};\ \sin Z = \frac{XY}{2R}$$

Do $X + \alpha = 180^\circ$, $Y + \beta = 180^\circ$, $Z + \gamma = 180^\circ$.

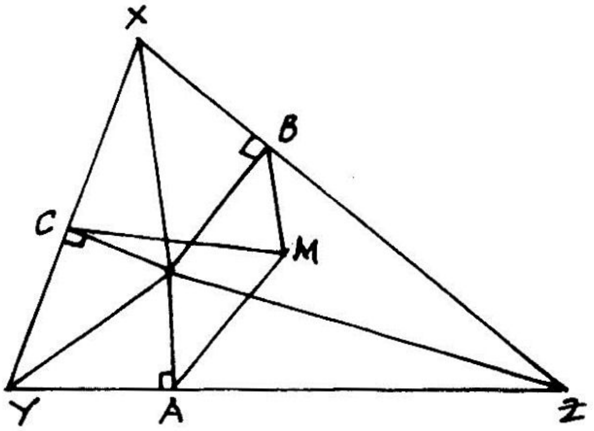
$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{YZ}{2R};\ \sin\beta = \frac{ZX}{2R};\ \sin\gamma = \frac{XY}{2R}.$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đưa được về dạng tương đương sau:

$$MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \geq IA.YZ + IB.ZX + IC.XY \qquad (1)$$

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. M nằm trong tam giác XYZ. Ta có ngay:



$IA.YZ + IB.ZX + IC.XY =$

$= 2\,(S_{IYZ} + S_{IXZ} + S_{IXY}) =$

$= 2\,S_{XYZ}$ (2)

Gọi h_1, h_2, h_3 là khoảng cách lần lượt từ M xuống YZ, XZ và XY, ta có theo tính chất của đường vuông góc.

$MA \geq h_1;\ MB \geq h_2;\ MC \geq h_3$ (3)

$\Rightarrow$ $MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \geq h_1.YZ + h_2.XZ + h_3.XY.$

hay $MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \geq 2\,(S_{MYZ} + S_{MXZ} + S_{MXY}) =$

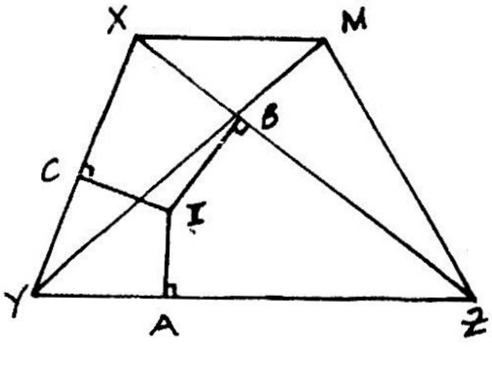
$= 2\,S_{XYZ}.$ (4)

Từ (2) (4) suy ra:

$MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \geq IA.YZ + IB.ZX + IC.XY$

Vậy (1) đúng. Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) $\Leftrightarrow$ $M \equiv I$.

2. M nằm ngoài tam giác XYZ.



Lý luận như trên (xem (4)), ta vẫn có:

$MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \geq$

$2\,(S_{MYZ} + S_{MXZ} + S_{MXY})$ (4).

Rõ ràng trường hợp này, ta có:

$(S_{MYZ} + S_{MXY} + S_{MXZ}) > S_{XYZ}$ (5)

Từ (2) (4) (5) suy ra:

$$MA.YZ + MB.ZX + MC.XY > IA.YZ + IB.ZX + IC.XY.$$

Vậy (1) cũng đúng và dấu bằng không thể xảy ra.

Tóm lại bất đẳng thức đã cho là đúng, và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $M \equiv I$.

Chú ý. Từ ví dụ 48, ta suy ra các kết quả lý thú sau đây:

* *Ứng dụng 1*: Cho tam giác ABC, trong đó max (A, B, C) < 120°. Điểm I_o nằm bên trong tam giác gọi là điểm Toriselli, nếu như:

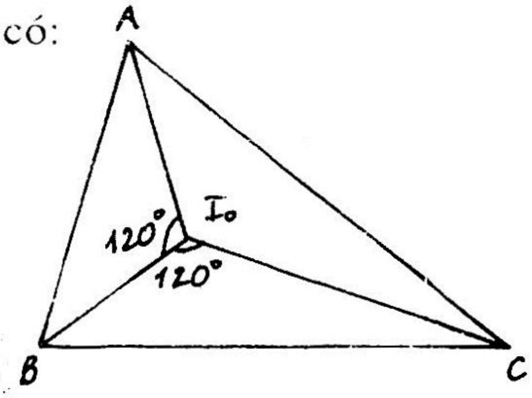
$$\widehat{I_oBC} = \widehat{I_oAC} = \widehat{I_oAB} = 120^\circ.$$

Chứng minh rằng điểm Toriselli I_o có tính chất sau: ∀ vị trí của M trong mặt phẳng chứa tam giác, ta có:

$$MA + MB + MC \geq I_oA + I_oB + I_oC.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I_o$.

Chứng minh: Ứng dụng 1 suy trực tiếp từ ví dụ 48 trên với $I \equiv I_o$, $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$.



(Lưu ý rằng điểm I_o là giao của 3 cung chứa góc 120°, dựng trên ba cạnh, I_o nằm trong tam giác do có giả thiết: max (A, B,C) < 120°).

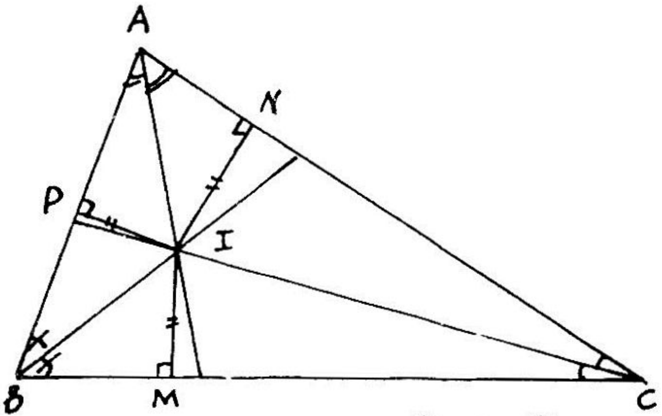
Chúng ta sẽ gặp lại kết quả này trong chương 4 (Phép quay).

* *Ứng dụng 2*: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$m_a \cos\frac{A}{2} + m_b \cos\frac{B}{2} + m_c \cos\frac{C}{2} \geq \frac{3p}{2};$$

ở đây m_a, m_b, m_c tương ứng là ba đường trung tuyến kẻ từ A, B, C, còn p là nửa chu vi.

Chứng minh.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC. Kẻ IM ⊥ BC, IN ⊥ AC , IP ⊥ AB. ⇒ AP = AN = p - a; BP = BM = p - b; CM = CN = p - c. Ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{B + C}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \sin\widehat{BIC} = \sin\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}.$$

Tương tự có sin: $\widehat{AIC} = \cos\frac{B}{2}$; $\sin\widehat{AIB} = \cos\frac{C}{2}$.

Áp dụng ví dụ 48 với điểm I, ở đây $\widehat{BIC} = \alpha$, $\widehat{AIC} = \beta$, $\widehat{AIB} = \gamma$, và lấy M ≡ G. Khi đó ta có:

$$GA\sin\alpha + GB\sin\beta + GC\sin\gamma \geq IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma \qquad (1)$$

Theo tính toán trên, và để ý rằng: $GA = \frac{2}{3}m_a$; $GB = \frac{2}{3}m_b$; $GC = \frac{2}{3}m_c$; thì từ (1) có:

$$\frac{2}{3}m_a\cos\frac{A}{2} + \frac{2}{3}m_b\cos\frac{B}{2} + \frac{2}{3}m_c\cos\frac{C}{2} \geq$$

$$\geq IA\cos\frac{A}{2} + IB\cos\frac{B}{2} + IC\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}\left(m_a \cos\frac{A}{2} + m_b \cos\frac{B}{2} + m_c \cos\frac{C}{2}\right) \geq$$

$$\geq AP + BM + CN = (p - a) + (p - b) + (p - c) = p.$$

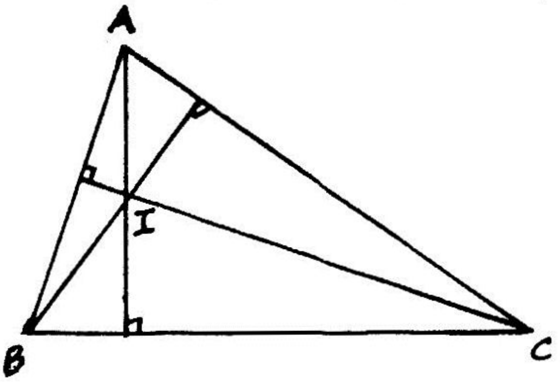
$$\Leftrightarrow \quad m_a \cos\frac{A}{2} + m_b \cos\frac{B}{2} + m_c \cos\frac{C}{2} \geq \frac{3p}{2}.$$

Đó là đ.p.c.m.. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow G \equiv I \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

* *Ứng dụng 3:* Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC, ta có:

$$3(a\cos A + b\cos B + c\cos C) \leq (a + b + c)\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

Chứng minh: Gọi I là trực tâm tam giác ABC.



Dễ thấy: $\widehat{BIC} = 180^o - A$

$\widehat{AIC} = 180^o - B$

$\widehat{AIB} = 180^o - C.$

$\Rightarrow IA \sin\widehat{BIC} = IA \sin(180^o - A)$

$= IA \sin A.$

Xét tam giác AIB, theo ví dụ (cùng chương), ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAIB cũng bằng R, ở đây R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

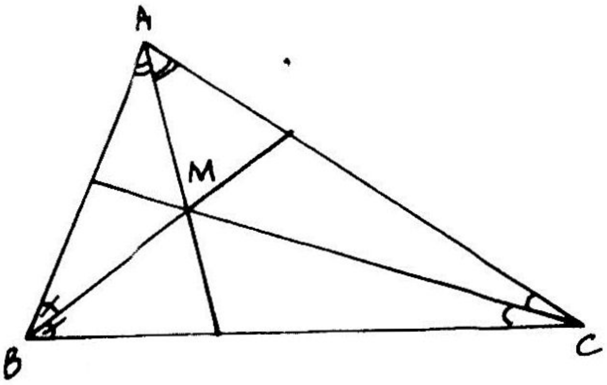
Theo định lý hàm số sin, có $AI = 2R \sin\widehat{ABI} = 2R\cos A$ (do $\widehat{ABI} + \widehat{A} = 90^o$).

$\Rightarrow \quad AI \sin\widehat{BIC} = 2R \sin\widehat{ABI} \cos A = a \cos A.$

Lý luận tương tự, có: $BI \sin\widehat{AIC} = b \cos B$

$CI \sin\widehat{AIB} = c \cos C.$

Áp dụng ví dụ với điểm I, và $\alpha = \widehat{BIC}$, $\beta = \widehat{AIC}$, $\gamma = \widehat{AIB}$; ngoài ra với M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có:



$$MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma$$

$$\geq IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma.$$

$$\Leftrightarrow MA\sin A + MB\sin B + MC\sin C$$

$$\geq a\cos A + b\cos B + c\cos C \qquad (1)$$

Theo ví dụ 4, ta có:

$$MA\sin A = 2MA\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2(p - a)\sin\frac{A}{2} = (b + c - a)\sin\frac{A}{2}.$$

Tương tự có: $MB\sin B = (a + c - b)\sin\dfrac{B}{2}.$

$$MC\sin C = (a + b - c)\sin\frac{C}{2}.$$

Từ (1) suy ra:

$$(b + c - a)\sin\frac{A}{2} + (c + a - b)\sin\frac{B}{2} + (a + b - c)\sin\frac{C}{2} \geq$$

$$\geq a\cos A + b\cos B + c\cos C \qquad (2)$$

Không giảm tổng quát, có thể cho là $A \geq B \geq C$ (tức $a \geq b \geq c$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} \geq \sin\dfrac{B}{2} \geq \sin\dfrac{C}{2} \\ b + c - a \leq a + c - b \leq a + b - c \end{cases}$$

Vậy theo bất đẳng thức Trêbưsep, ta có:

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)[(b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c)] \geq$$

$$\geq 3\left[(b+c-a)\sin\frac{A}{2}+(c+a-b)\sin\frac{B}{2}+(a+b-c)\sin\frac{C}{2}\right] \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra:

$$(a+b+c)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) \geq 3\,(a\cos A+b\cos B+c\cos C).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = C \\ I \equiv M \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Chương III

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG CÁC HÌNH

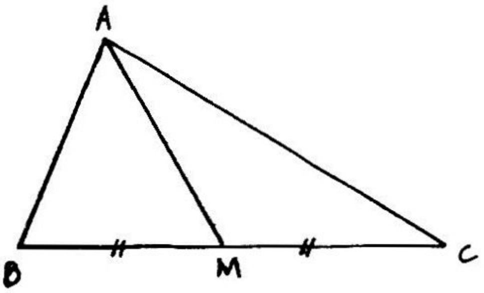
§ 1. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

A. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Định lí 1: Trong một tam giác ABC, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Ở đây M là trung điểm của cạnh BC

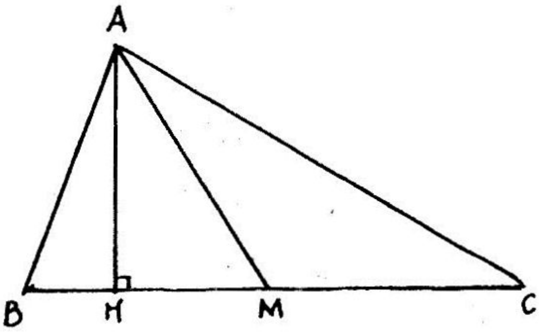


Hệ quả: Cho đoạn thẳng BC = a cố định. Quĩ tích những điểm A thoả mãn điều kiện $AB^2 + AC^2 = k^2$, với điều kiện $k > \frac{a\sqrt{2}}{2}$ là đường tròn tâm là trung điểm M của BC và bán kính: $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$

Định lí 2 :

Trong mọi tam giác ABC, ta có: $AC^2 - AB^2 = 2\,BC.HM$

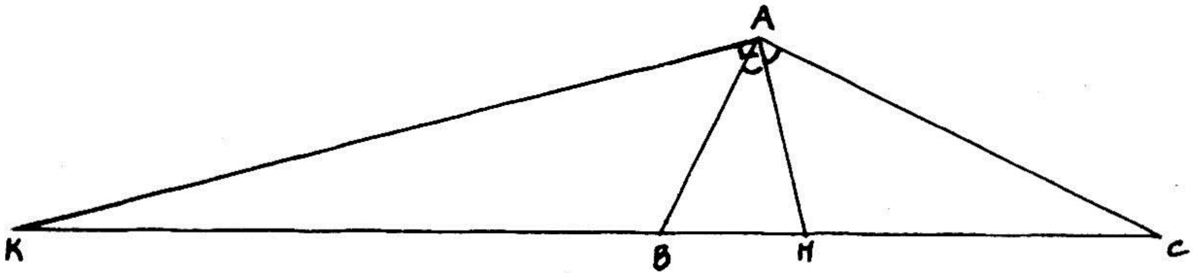
Trong đó H là chân đường cao kẻ từ A, còn M là trung điểm của BC.



Hệ quả: Cho đoạn thẳng BC = a cố định. Quĩ tích những điểm A thoả mãn điều kiện $AC^2 - AB^2 = k$, với k là hằng số cho trước là đường thẳng vuông góc với BC tại điểm H, trong đó:

$\overline{HM} = \dfrac{k}{2\overline{BC}}$. Ở đây M là trung điểm của BC, và $\overline{BC} = a$.

Định lí 3: Cho đoạn thẳng BC = a cố định. Quĩ tích những điểm M thoả mãn điều kiện $\dfrac{MB}{MC} = k$, trong đó k là hằng số dương khác 1 cho trước; là đường tròn đường kính HK, ở đây H và K là các điểm chia trong và ngoài đoạn BC theo tỷ số k, (tức là $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{KB}{KC} = k$). Đường tròn này gọi là đường tròn Apolonint.



B. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN.

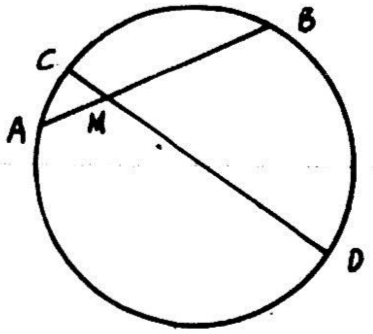
Định lí 1:

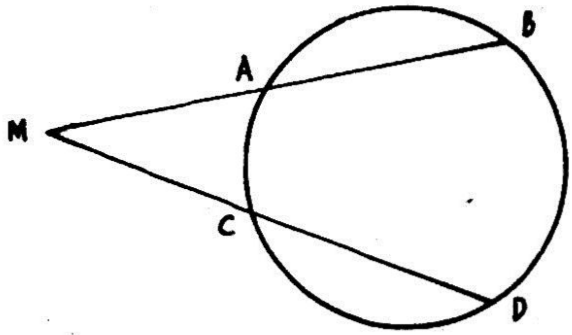
1. Giả sử AB và CD là hai dây của đường tròn cắt nhau tại điểm M trong đường tròn. Khi đó ta có: MA.MB = MC.MD

2. Đảo lại giả sử MA.MB = MC.MD, thì bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn.

Chú ý:

- Định lí 1 vẫn còn đúng, nếu như hai dây AB, CD cắt nhau tại điểm M ngoài đường tròn.

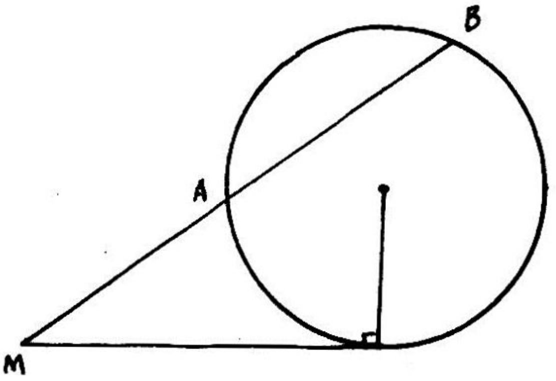




- Đôi khi định lí trên còn được viết dưới dạng sau:

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$$

Định lí 2:



1. Cho M là một điểm ở ngoài đường tròn. Giả sử MAB là cát tuyến còn MT là tiếp tuyến với đường tròn ấy. Khi đó ta có hệ thức sau:

$$MA \cdot MB = MT^2.$$

2. Đảo lại, nếu ta có $MA.MB = MT^2$, trong đó M, A, B thẳng hàng và T ở ngoài đường thẳng nối M, A, B, thì MT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABT.

Phương tích của một điểm M đối với một đường tròn cho trước.

Cho đường tròn tâm O, bán kính R, M là một điểm cho trước trên mặt phẳng chứa đường tròn. Phương tích của điểm M đối với đường tròn O (và sẽ kí hiệu là $\mathscr{P}_M(o)$) được định nghĩa là đại lượng sau đây:

$$\mathscr{P}_M(o) = d^2 - R^2 \quad ; \text{ở đây } d = OM.$$

Từ định nghĩa trên suy ra:

$$\mathscr{P}_M(o) \begin{cases} > 0, \text{ nếu điểm M nằm ngoài đường tròn} \\ = 0, \text{ nếu điểm M nằm trên đường tròn} \\ < 0, \text{ nếu điểm M nằm trong đường tròn} \end{cases}$$

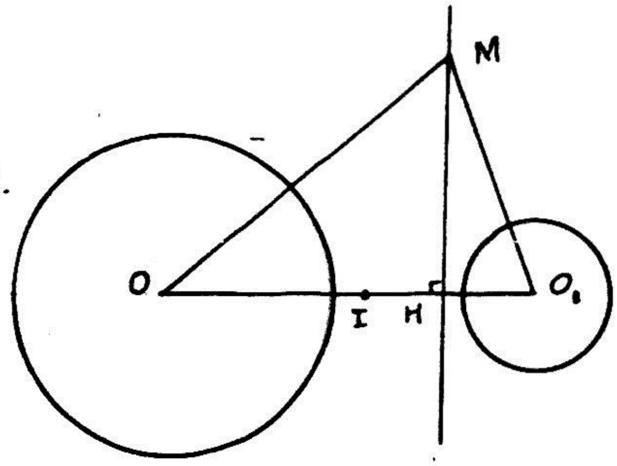
Định lí 3 : Cho hai đường tròn (O, R) và (O_1, R_1). Quĩ tích những điểm M có cùng phương tích với hai đường tròn trên

($\mathscr{P}_{M(o)} = \mathscr{P}_{M(o_1)}$), là đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối tâm OO_1 tại điểm H, trong đó:

$$HI = \frac{R_1^2 - R^2}{2OO_1}\,,$$ ở đây I là trung điểm của OO_1.

Đường thẳng này gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn nói trên.

$MO^2 - MO_1^2 = R^2 - R_1^2 = \text{const.}$



Định lí Ptoleme đối với tứ giác nội tiếp:

Định lí 4: Cho ABCD là tứ giác nội tiếp. Khi đó ta có hệ thức sau:

$$AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD$$

(Chứng minh của Định lí Ptoleme có nhiều cách. Dưới đây là một trong các cách chứng minh ấy)

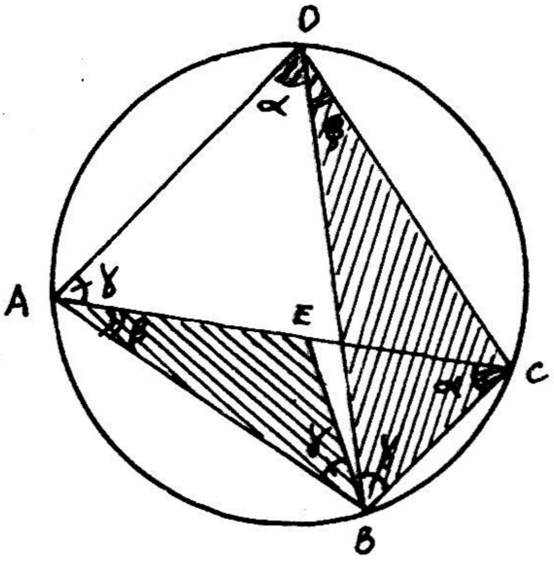
Chứng minh: Trên AC lấy E sao cho $\widehat{ABE} = \gamma \Rightarrow \Delta\, ABE \sim \Delta\, DBC$;

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AE}{DC} \qquad (1)$$

Mặt khác $\Delta\, CBE \sim \Delta\, DBA$

$$\Rightarrow \quad \frac{CB}{DB} = \frac{CE}{DA} \qquad (2)$$

(1) $\Rightarrow$ $AB \,.\, CD = DB \,.\, AE$



(2) $\Rightarrow$ BC . DA = DB . CE

$\Rightarrow$ AB.CD + BC.DA = DB (AE+CE) = DB.AC   đ.p.c.m..

§2. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Có tồn tại hay không một tam giác không cân thoả mãn điều kiện : $a + m_a = b + m_b$

BÀI GIẢI

Giả sử ABC là tam giác không cân thoả mãn điều kiện :

$$a + m_a = b + m_b. \qquad (1)$$

Rõ ràng ta có:

$$m_a^2 - m_b^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$$

Vì ABC không phải là tam giác cân nên $m_a - m_b = b - a \neq 0$. Từ đẳng thức trên, ta được:

$$(m_a + m_b)(m_a - m_b) = \frac{3}{4}(b + a)(b - a) \quad \text{hay:}$$

$$m_a + m_b = \frac{3}{4}(a + b)$$

Kết hợp với $m_a - m_b = b - a$, ta suy ra:

$$m_a = \frac{7b - a}{8} \qquad \text{và} \qquad m_b = \frac{7a - b}{8} \qquad (*)$$

Từ công thức: $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ và kết hợp với (*), ta đi đến hệ thức sau:

$$17a^2 + 17b^2 - 32c^2 - 14ab = 0 \qquad (2)$$

Vậy (2) là điều kiện cần để có tam giác thoả mãn yêu cầu đầu bài.

Xét các tam giác thoả mãn (2), trong đó ta chủ ý lấy:

$$a = 1 \ ; \ b = 2 \ ; \ c = \sqrt{\frac{57}{32}}$$

Do vậy $1 < c < 3 \Rightarrow$ có thể lấy a, b, c, làm ba cạnh của một tam giác, và hiển nhiên a, b, c, thoả mãn (2).

Áp dụng công thức tính đường trung tuyến, có:

$$m_a^2 = \frac{2\left(4 + \frac{57}{32}\right) - 1}{4} \qquad \Rightarrow \ m_a = \frac{13}{8}$$

$$m_a^2 = \frac{2\left(1 + \frac{57}{32}\right) - 4}{4} \qquad \Rightarrow \ m_b = \frac{5}{8}$$

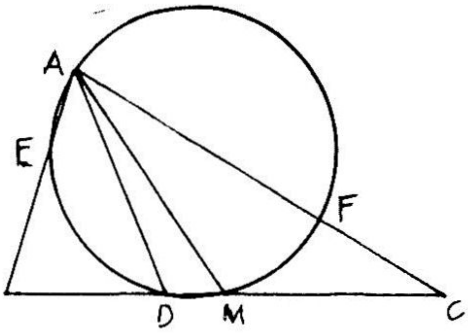
Như vậy có tồn tại tam giác không cân thoả mãn hệ thức :

$$a + m_a = b + m_b.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC (B > C). Vẽ trung tuyến AM và phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB và AC tương ứng tại E và F. Chứng minh rằng: BE = CF.

BÀI GIẢI

Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có:



$$BE\,.\,BA = BD\,.\,BM$$

$$\Rightarrow \quad BE = \frac{BD.BM}{AB} \qquad (1)$$

$$CF\,.\,CA = CM\,.\,CD$$

$$\Rightarrow \quad CF = \frac{CM.CD}{AC} \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF \quad \Leftrightarrow \dfrac{BD.BM}{AB} = \dfrac{CM.CD}{AC}$

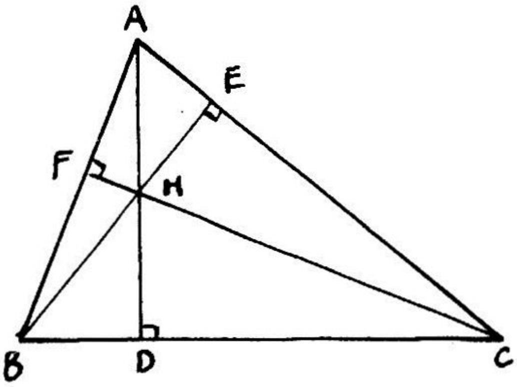
$$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \qquad (3)$$

Rõ ràng theo định lí đường phân giác, thì (3) đúng. Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

$$AD.AH + BE.BH + CF.CH = \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 + AB^2).$$

BÀI GIẢI



Theo hệ thức lượng đối với đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHE, ta có:

$$CE.CA = CH.CF \qquad (1)$$

Đối với đường tròn ngoại tiếp tứ giác FHDB, có:

$$CH.CF = CD.CB \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$CE.CA = CH.CF = CD.CB \qquad (3)$$

Lý luận tương tự có:

$$BF.BA = BH.BE = BD.BC \qquad (4)$$

$$AH.AD = AF.AB = AE.AC \qquad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra: $2(AH.AD + BH.BE + CH.CF) =$

$= AE.AC + BF.BA + CD.CB + AF.AB + BD.BC + CE.CA$

$= AB(AF + FB) + AC(CE + EA) + BC(BD + DC)$

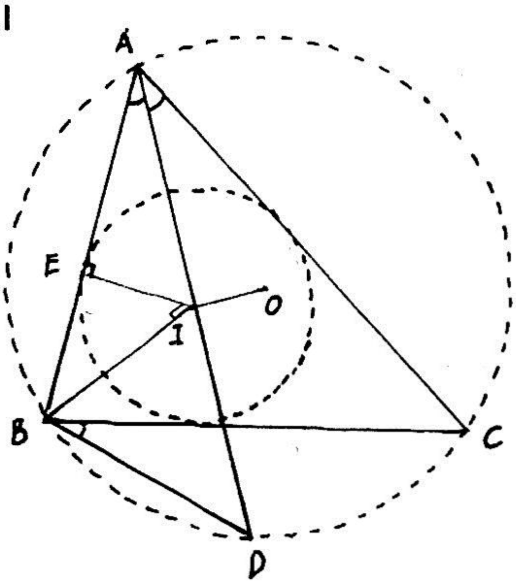
$= AB^2 + AC^2 + BC^2$

$\Rightarrow AD.AH + BE.BH + CF.CH = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 4. (Công thức Euler). Cho tam giác ABC. Gọi O và I tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác còn R, r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Chứng minh rằng: $l^2 = R^2 - 2Rr$, ở đây $l = IO$

BÀI GIẢI



Đường phân giác trong của góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tại D. Dễ thấy:

$\widehat{IBD} = \widehat{BID}$ (Vì cùng $= \dfrac{A + B}{2}$)

$\Rightarrow DB = DI \qquad (1)$

Ta có: $IA.ID = -\mathscr{P}_{I}(o) = R^2 - IO^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $IA.DB = R^2 - l^2$ (3)

Trong tam giác vuông IAE, ta có:

$$IA = \frac{IE}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \qquad (4)$$

Theo định lí hàm số sin trong tam giác DBA, ta có (với chú ý bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DBA cũng chính là R):

$$BD = 2R\sin\widehat{BAD} = 2R\sin\frac{A}{2} \qquad (5)$$

Thay (4) (5) vào (3), có : $R^2 - l^2 = 2Rr$ hay $l^2 = R^2 - 2Rr$

Công thức Euler dược chứng minh.

Chú ý :

1. Từ công thức Euler suy ra trong mọi tam giác ABC, ta có bất đẳng thức sau: $R \geq 2r$ *(6)*

Thật vậy : do $R^2 - 2Rr = l^2 \Rightarrow R^2 - 2Rr \geq 0.$

$\Rightarrow R(R - 2r) \geq 0$

$\Rightarrow R \geq 2r$

Vậy (6) được chứng minh.

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow l = 0$

$\Leftrightarrow I \equiv O$

$\Leftrightarrow$ *ABC là tam giác đều.*

2. Theo chương 2, ta có $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. *Vì vậy từ (6) ta được thêm một bất đẳng thức thông dụng sau đây: Trong mọi tam giác ABC ta có:*

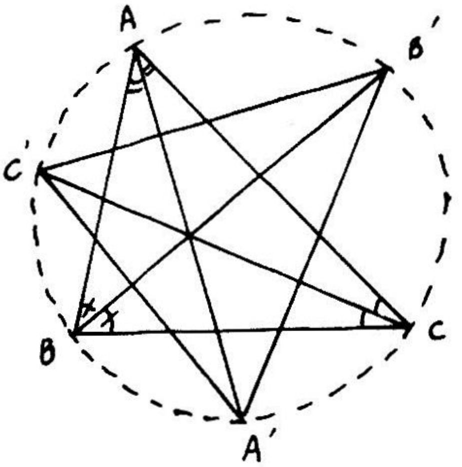
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8} \qquad (7)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ *ABC là tam giác đều.*

3. Công thức (7) cho phép ta đi đến nhiều sự kiện lí thú trong tam giác. Sau đây là một ví dụ minh hoạ điều ấy.

Ứng dụng :

Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. Đường phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tại A', B', C'. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:



$$S_{ABC} \le S_{A'B'C'} \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Thật vậy, chú ý rằng hai tam giác ABC và A'B'C' cùng nội tiếp trong một đường tròn (gọi R là bán kính của nó), nên:

$$(8) \Leftrightarrow 2R^2\sin A\sin B\sin C \le 2R^2\sin A'\sin B'\sin C'$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C \le \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(Ở đây ta đã dùng công thức: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ với $0 \le \alpha \le 90^0$).

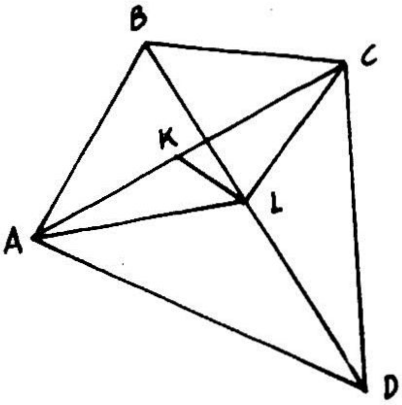
$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Do (7) nên suy ra (8) đúng $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 5. *(Công thức Euler cho tứ giác)*

Cho tứ giác ABCD có AB = a, BC = b, DA = d, AC = e, BD = f. Gọi K và L là trung điểm của AC và BD. Khi đó, hãy chứng minh: $KL^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)$

BÀI GIẢI



Xét tam giác ALC, ta có theo công thức tính đường trung tuyến

$$KL^2 = \frac{2LC^2 + 2LA^2 - AC^2}{4} \qquad (1)$$

Lại theo công thức ấy, trong các Δ ABD, BCD suy ra từ (1)

$$KL^2 = \frac{2\,\frac{2BC^2 + 2CD^2 - BD^2}{4} + 2\,\frac{2AB^2 + 2AD^2 - BD^2}{4} - AC^2}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$

Đó là đ.p.c.m..

***Chú ý**: Từ ví dụ 5 suy ra kết quả sau đây:*

Tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi thoả mãn hệ thức sau:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

Thật vậy, nếu gọi K và L tương ứng là trung điểm của các đường chéo AC và BD, thì ABCD là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \quad K \equiv L$$

$$\Leftrightarrow \quad KL = O \qquad \textit{(theo ví dụ 5 suy ra)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

Đó là đ. p. c.m..

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Gọi d_1 là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tới trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng:

$$d_1{}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

BÀI GIẢI

Gọi O và G tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp [1] và trọng tâm tam giác ABC. Áp dụng công thức Leibnitz cho điểm O ta có:

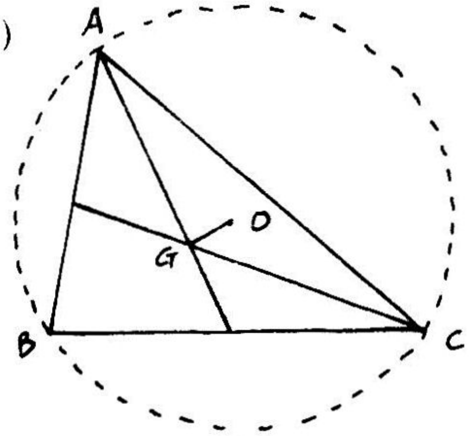
---

[1] Theo chương I, ta có công thức Leibnitz sau đây:

Cho tam giác ABC, với G là trọng tâm. M là một điểm bất kì. Khi đó ta có đẳng thức sau: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ hay:

$$3R^2 = 3d_1^2 + \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \ (1)$$



Áp dụng công thức loại :

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

thì từ (1) suy ra:

$$3R^2 = 3d_1^2 + \frac{4}{9}.\frac{(2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}{4}$$

$$\Rightarrow 3R^2 = 3d_1^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \text{ hay } d_1^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Chú ý: *Từ công thức trên, ta suy ra bất đẳng thức sau:*

Trong mọi tam giác ABC, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 9R^2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow d_1 = O$

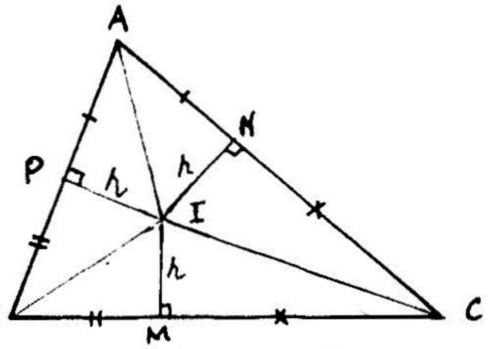
$\Leftrightarrow$ *ABC là tam giác đều.*

Ví dụ 7. Gọi d_2 là khoảng cách từ tâm vòng tròn nội tiếp tới trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng:

$d_2^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$; ở đây p là nửa chu vi, còn R, r tương ứng là các bán kính đường tròn nội và ngoại tiếp của tam giác.

BÀI GIẢI

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm tam giác ABC. Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:



$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3IG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \qquad (1)$$

Gọi M, N, P là ba tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với ba cạnh BC , AC , AB . Rõ ràng ta có:

$$AN = AP = p - a \ ; \ BM = BP = p - b \text{ và } CM = CN = p - c$$

$$\Rightarrow \qquad IA^2 = (p-a)^2 + r^2$$

$$IB^2 = (p - b)^2 + r^2$$

$$IC^2 = (p - c)^2 + r^2$$

Áp dụng công thức tính trung tuyến như các ví dụ trên, từ (1) có :

$$3r^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = 3d_2^{\,2} + \frac{4}{9}(m_a^{\,2} + m_b^{\,2} + m_c^{\,2})$$

$$\Rightarrow 3r^2 + 3p^2 - 2p(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 = 3d_2^{\,2} + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

Do $a + b + c = 2p$ nên từ (1) suy ra:

$$3d_2^{\,2} = 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \qquad \text{hay:}$$

$$d_2^{\,2} = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$

Đó là đ.p.c.m..

Chú ý. *Từ ví dụ 7, ta suy ra kết quả sau đây:*

Trong mọi tam giác ta có bất đẳng thức sau

$$p^2 + 5r^2 \geq 16Rr$$

Dấu bằng xẩy ra $\Leftrightarrow d_2 = 0$

$\Leftrightarrow I \equiv G$

$\Leftrightarrow$ *ABC là tam giác đều.*

Ví dụ 8. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$1/\ \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$$

$$2/\ \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ở đây m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến của tam giác

BÀI GIẢI

Áp dụng công thức $m_a{}^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

$\Rightarrow \quad (2m_a)^2 + (a\sqrt{3})^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương $(2m_a)^2$ và $(a\sqrt{3})^2$, ta có: $(2m_a)^2 + (a\sqrt{3})^2 \geq 2(2am_a\sqrt{3}) \qquad (2)$

Thay (1) vào (2) có: $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(2am_a\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \qquad am_a \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{am_a} \geq \frac{2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (4)$$

Ta có từ (4): $$\frac{a}{m_a} = \frac{a^2}{am_a} \geq \frac{2a^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (5)$$

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_a^2}{am_a} \geq \frac{2m_a^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (6)$$

Dấu bằng trong (5) (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ có dấu bằng trong (2)

$$\Leftrightarrow 2m_a = a\sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \frac{m_a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lí luận tương tự, có: $$\frac{b}{m_b} \geq \frac{2b^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (7)$$

$$\frac{m_b}{b} \geq \frac{2{m_b}^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (8)$$

Dấu bằng trong (7) (8) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{m_b}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{c}{m_c} \geq \frac{2c^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (9)$$

$$\frac{m_c}{c} \geq \frac{2{m_c}^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (10)$$

Dấu bằng xảy ra trong (9) (10) $\Leftrightarrow \dfrac{m_c}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Cộng từng vế (5) (7) (9) có:

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3} \qquad (11)$$

Cộng từng vế (6) (8) (10) có:

$$\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{2\sqrt{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (*)$$

Lại áp dụng công thức về đường trung tuyến, ta thấy:

$$m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 = \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4} \qquad (**)$$

Thay (**) vào (*) có:

$$\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (12)$$

Dấu bằng trong (11) và (12) xảy ra.

$\Leftrightarrow$ Đồng thời có dấu bằng trong (5) (6) (7) (8) (9) (10)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4m_a^2 = 3a^2 \\ 4m_b^2 = 3b^2 \\ 4m_c^2 = 3c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3a^2 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 3b^2 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 2a^2 \\ a^2 + c^2 = 2b^2 \\ a^2 + b^2 = 2c^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $a = b = c$ $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài toán được giải hoàn toàn.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu m_a, m_b, m_c là độ dài ba trung tuyến, thì :

$$\frac{9}{20}(ab + bc + ca) < m_am_b + m_bm_c + m_cm_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca)$$

BÀI GIẢI

1. Ta có: $2m_a < b + c$ ($2m_a$ là đường chéo hình bình hành cạnh b, c)

$$2m_b < a + c;\ 2m_c < a + b \ \Rightarrow m_a + m_b + m_c < a + b + c$$

$$\Rightarrow \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a) <$$

$$< a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \qquad (1)$$

Áp dụng công thức về trung tuyến tam giác, ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4}$$, do vậy từ (1) suy ra:

$$2(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a) < \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + 2ab + 2ac + 2bc \qquad (2)$$

Do trong mọi tam giác ta có: $a > |b - c|$

$$\Rightarrow \quad a^2 > b^2 + c^2 - 2bc$$

Tương tự $b^2 > a^2 + c^2 - 2ac$

$c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$

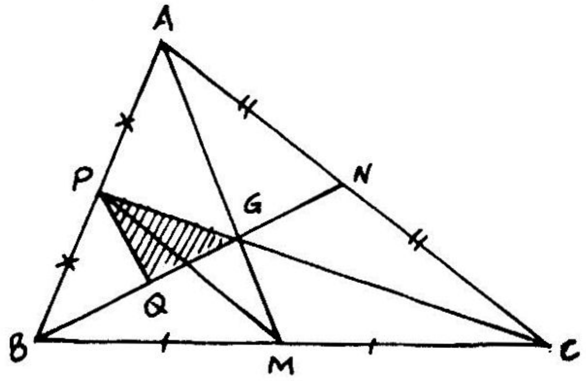
Từ đó suy ra $2ab + 2ac + 2bc > a^2 + b^2 + c^2$

hay $$\frac{ab + ac + bc}{2} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) suy ra:

$$m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca)$$

⇒ vế phải của bất đẳng thức kép được chứng minh.



2. Giả sử AM, BN, CP là ba trung tuyến và G là trọng tâm. Vẽ PQ // AM (xem hình bên).

Xét tam giác PQG. Dễ thấy ba cạnh của tam giác này có độ dài là $\frac{1}{3}m_a$, $\frac{1}{3}m_b$, $\frac{1}{3}m_c$, còn ba trung tuyến của nó có độ dài là $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{4}b$, $\frac{1}{4}c$.

Áp dụng kết quả phần **1**. vào tam giác này ta có:

$$\frac{1}{16}(ab + bc + ca) < \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{9}(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a)$$

hay $$\frac{9}{20}(ab + bc + ca) < m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a$$

Vế trái của bất đẳng thức kép được chứng minh.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. Ba trung tuyến AA', BB', CC' lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} \leq \frac{9}{4}$$

BÀI GIẢI

Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có:

$$AA'.A\,A_1 = BA'.A'C = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad AA'.A\,A_1 = AA'(AA' + A'A_1) = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2} \qquad (1)$$

Ta có: $$\frac{AA'}{AA_1} = \frac{AA'^2}{AA'.AA_1} = \frac{m_a^2}{AA'.AA_1} \qquad (2)$$

Lại áp dụng công thức về đường trung tuyến, thì từ (1), (2) suy ra:

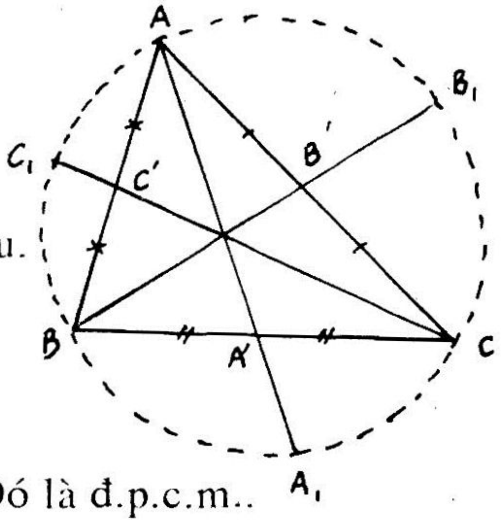
$$\frac{AA'}{AA_1} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2\left(b^2 + c^2\right)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2 + c^2} \qquad (3)$$

Từ đó và bằng lí luận tương tự, đi đến:

$$\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} = 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}\right) \qquad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Nésbit, ta có:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{3}{2}\quad(5)$$



Dấu bằng trong (5) xảy ra ⇔ $a^2 = b^2 = c^2$

⇔ $a = b = c$ ⇔ ABC là tam giác đều.

Từ (4) (5) suy ra: $\frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1}\le\frac{9}{4}$

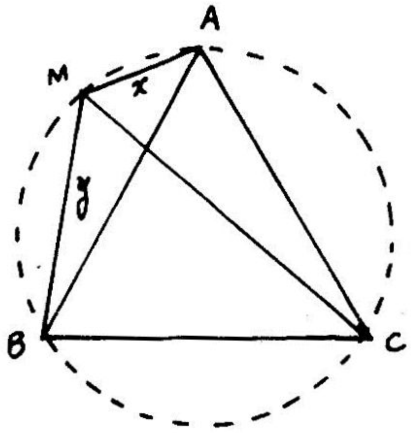
Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều. Đó là đ.p.c.m..

Chú ý: *Về bất đẳng thức Nesbit, bạn đọc có thể tìm thấy trong cuốn "Chuyên đề về bất đẳng thức chọn lọc cho học sinh PTCS", tập II - NXB giáo dục 1997 của cùng tác giả.*

Ví dụ 11. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn. M là một điểm tuỳ ý nằm trên đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng đại lượng $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên đường tròn.

BÀI GIẢI

Giả sử $M \in \overset{\frown}{AB}$. Gọi a là cạnh của tam giác đều ABC. Áp dụng định lí Ptoleme vào tứ giác MABC, ta có:



$$AB.MC = AC.MB + AM.BC$$

$$\Rightarrow\quad a.MC = a\,(MB + MA)$$

$$\Rightarrow MC = MA + MB\qquad(1)$$

Đặt MA = x, MB = y, ta có (theo (1)):

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = x^4 + y^4 + (x+y)^4 =$$

$= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3) \qquad (2)$

Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác MAB, có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB\cos\widehat{AMB}$$

Do $\cos\widehat{AMB} = \cos 120^0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = x^2 + y^2 + xy$

$$\Rightarrow \quad a^4 = (x^2 + y^2 + xy)^2 = x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 \qquad (3)$$

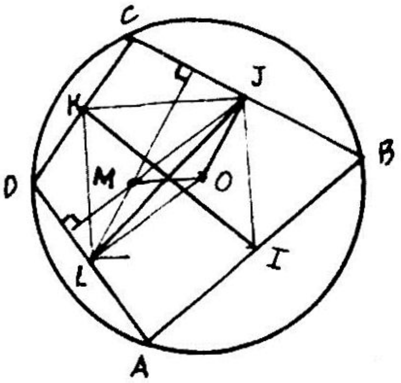
Từ (2) (3) suy ra $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 2a^4 = \text{cosst.}$

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 12. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn bán kính R. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua điểm giữa của các cạnh và vuông góc với cạnh đối diện cắt nhau ở một điểm M và ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$

BÀI GIẢI

1. Gọi I, J, K, L là các trung điểm của AB, BC, CD, DA. Đường vuông góc với BC kẻ từ L, và đường vuông góc với DA kẻ từ J cắt nhau ở M. Giả sử: OA = OB = OC = OD



Khi đó: OJ ⊥ BC và OL ⊥ DA ⇒ OJML là hình bình hành. Lại có IJKL cũng là hình bình hành. Hai hình bình hành này có các đường chéo OM, LJ, IK cắt nhau tại điểm giữa của mỗi đường ⇒

OIMK là hình bình hành.

⇒ KM // OI và IM // OK. Vì OI ⊥ AB ⇒ KM ⊥ AB.

Tương tự IM ⊥ CD.

Vậy các đường thẳng đi qua điểm giữa của các cạnh và vuông góc với cạnh đối diện đồng qui tại M.

2. Theo công thức hệ thức lượng trong tam giác MAB, ta có:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \qquad (1)$$

Tương tự trong tam giác MCD, có:

$$MC^2 + MD^2 = 2MK^2 + \frac{CD^2}{2} \qquad (2)$$

Cộng từng vế (1) (2) có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(MI^2 + MK^2) + \frac{AB^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \quad (3)$$

Do $MI = KO$; $MK = IO$, nên từ (3) có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(OI^2 + OK^2) + \frac{AB^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \quad (4)$$

Lại áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác AOB và OCD có:

$$2R^2 = OA^2 + OB^2 = 2OI^2 + \frac{AB^2}{2} \qquad (5)$$

$$2R^2 = OC^2 + OD^2 = 2OK^2 + \frac{CD^2}{2} \qquad (6)$$

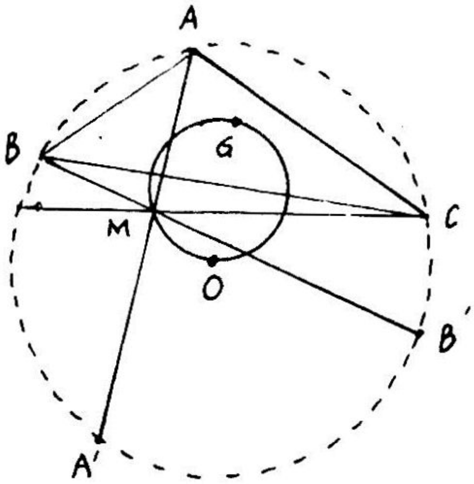
Thay (5) (6) vào (4) có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2 \quad \Rightarrow \quad \text{đ.p.c.m..}$$

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Tìm quĩ tích những điểm M nằm trong đường tròn sao cho ba dây cung đi qua M là AA', BB' và CC' thoả mãn hệ thức:

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$$

BÀI GIẢI



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Theo công thức tính khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác (xem ví dụ 6), ta có:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \quad (1)$$

Vì M nằm trong đường tròn, nên theo hệ thức lượng trong đường tròn và công thức tính phương tích, ta có:

$$MA.MA' = MB.MB' = MC.MC' = R^2 - OM^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{MA}{MA'} = \frac{MA^2}{MA.MA'} = \frac{MA^2}{R^2 - OM^2}$$

Tương tự $\frac{MB}{MB'} = \frac{MB^2}{R^2 - OM^2}$ và $\frac{MC}{MC'} = \frac{MC^2}{R^2 - OM^2}$.

Vậy từ giả thiết suy ra $\frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2} = 3.$

Theo công thức Leibnitz, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + \frac{4}{9}(m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2)$$

$$= 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) có:

$$3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = 3R^2 - 3OM^2$$

$$MG^2 + OM = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \qquad (4)$$

Từ (1) (4) suy ra: $MG^2 + OM^2 = OG^2$.

⇒ M nằm trên đường tròn đường kính OG.

Phần đảo xin dành cho bạn đọc. *(Chú ý rằng: Nếu ABC là tam giác đều thì $O \equiv G \Rightarrow M \equiv O$)*

Tóm lại ta có kết luận sau:

- Nếu ABC không là tam giác đều: Quĩ tích M là đường tròn đường kính OG.
- Nếu ABC là tam giác đều: Quĩ tích thu về 1 điểm {O}.

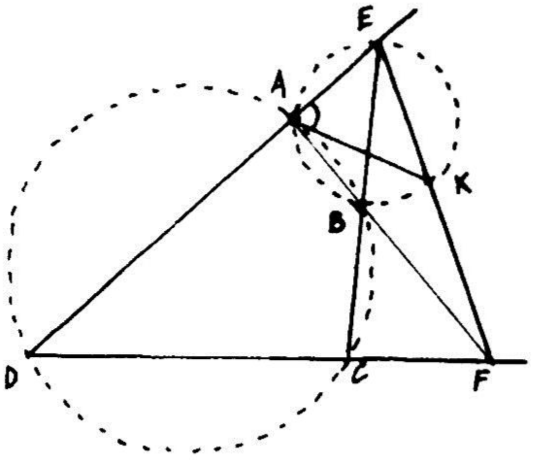
Ví dụ 14. Phần kéo dài các cạnh đối diện AB và CD; AD và CB của tứ giác ABCD lần lượt cắt nhau ở E và F. Giả sử EA.ED + FA. FB = EF^2.

Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.

BÀI GIẢI

Dựng vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Vòng tròn này cắt EF ở K. Theo hệ thức trong đường tròn, ta có :

FA.FB = FK.FE (1)



Theo giả thiết. thì :

$FA.FB + EA.ED = EF^2$ (2)

Từ (1), (2) ta có:

$EA.ED = EF^2 - FA.FB = EF^2 - FK.FE$

$= EF(EF - FK) = EF.EK$ (3)

Từ $EA.ED = EF.EK$ ⇒ tứ giác AKFD nội tiếp được

⇒ $\widehat{EAK} = \widehat{DFK}$ (vì cùng bù $\widehat{DAK}$)

⇒ $\widehat{EBK} = \widehat{DFK}$

Vậy $\Delta EBK = \Delta EFC \Rightarrow EK.EF = EB.EC$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $EA.ED = EB.EC$ (5)

Từ (5) suy ra ABCD là tứ giác nội tiếp ⇒ đ.p.c.m..

Chú ý: *Bài toán trên có thể giải cách khác như sau:*

Dựng hai vòng tròn ngoại tiếp hai tam giác ABE và DAF. Giả sử chúng lần lượt cắt EF ở hai điểm M, N. Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có:

$$EA.ED = EN.EF$$

$$FA.FB = FM.FE$$

$$\Rightarrow \quad EA.ED + FA.FB = EN.EF + EF.FM = EF(EN + MF) \qquad (6)$$

Theo giả thiết, ta có: $EA.ED + FA.FB = EF^2 = EF(EN + NF)$ (7)

Từ (6), (7) suy ra $EF(EN + MF) = EF(EN + NF)$

$$\Rightarrow \quad MF = NF \quad \Rightarrow M \equiv N$$

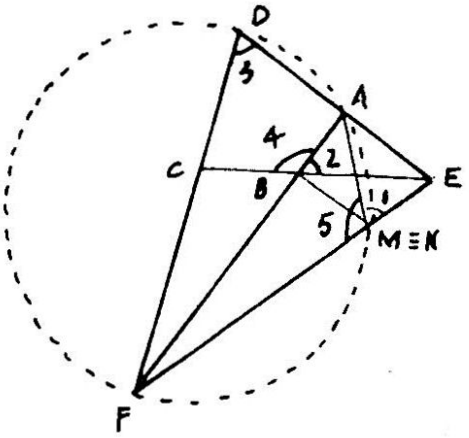
Vậy suy ra: $\widehat{AME} = \widehat{ABE} \Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{ABC}$

Ta lại có: $\widehat{AMF} + \widehat{ADF} = 180^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^0$

$\Rightarrow$ *ABCD là tứ giác nội tiếp*

$\Rightarrow$ *đ.p.c.m..*



Ví dụ 15. Cho đường tròn tâm O và AB là một dây cung của nó. Gọi I là trung điểm của cung nhỏ AB. Kẻ các dây IC, ID. Hai dây này lần lượt cắt dây AB tại E và G.

1. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ACE và ADG tiếp xúc với nhau.

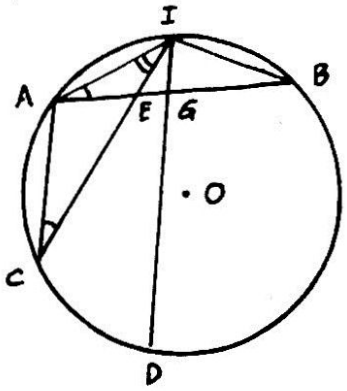
2. Chứng minh CDEG là tứ giác nội tiếp.

BÀI GIẢI

1. Xét hai tam giác AIC và EIA. Ta có góc I chung và $\widehat{IAE} = \widehat{ACI}$ (do I là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ)

$\Rightarrow$ $\Delta AIC \sim \Delta EIA$

$\Rightarrow$ $\dfrac{AI}{IC} = \dfrac{EI}{AI} \Rightarrow IA^2 = IE \,.\, IC \quad (1)$



Hệ thức (1) chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC tiếp xúc với IA tại A.

Lí luận hoàn toàn tương tự, có đường tròn ngoại tiếp tam giác AGD cũng tiếp xúc với IA tại A $\Rightarrow$ Hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác AEC và AGD tiếp xúc với nhau (tại A) $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

2. Từ chứng minh phần 1, ta có IE.IC = IG.ID (vì cùng bằng IA^2)

$\Rightarrow$ CDGE là tam giác nội tiếp $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 16. Cho đoạn thẳng AB cố định và điểm H nằm trên đường thẳng AB (ngoài đoạn AB) và HA > HB. Δ là đường thẳng vuông góc với AB tại H; M là điểm di động trên Δ. Gọi C là hình chiếu của B xuống AM, và giả sử BC ∩ Δ = N; AN ∩ BM = D.

1. Chứng minh: $\overline{HM}.\overline{HN}$ = cosst, và đường tròn đường kính MN luôn qua hai điểm cố định I, J.

2. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn qua hai điểm cố định A, E. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

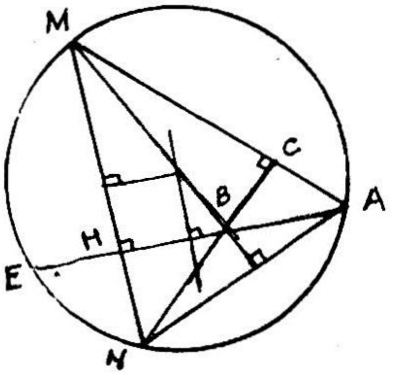
Chứng minh CD luôn đi qua điểm cố định K.

3. CD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại P, Q; CD cắt đường kính AA_1 của đường tròn này tại G. Chứng minh BMA_1N là hình bình hành, $AA_1 \perp CD$

và $AP^2 = AQ^2 = \overline{AA_1}.\overline{AG} = \overline{AK}.\overline{AE}$

Khi M di động, thì P và Q chạy trên đường nào?

BÀI GIẢI



1. Giả sử AB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm thứ hai là E.

Ta có: $\widehat{EMN} = \widehat{BAN}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EN}$)

$\widehat{BMN} = \widehat{BAN}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$\Rightarrow \quad \widehat{EMN} = \widehat{BMN} \Rightarrow \Delta MBE$ cân tại M ⇒ HB = HE (1)

Do H, B cố định, nên từ (1) suy ra E là điểm đối xứng của B qua H cũng phải cố định ⇒ đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn qua hai điểm cố định A và E. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN ⇒ FA = FE, vậy F nằm trên đường trung trực của AE. (Phần đảo xin dành cho bạn đọc) ⇒ Quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN là đường trung trực của AE.

Theo hệ thức trong đường tròn, ta có:

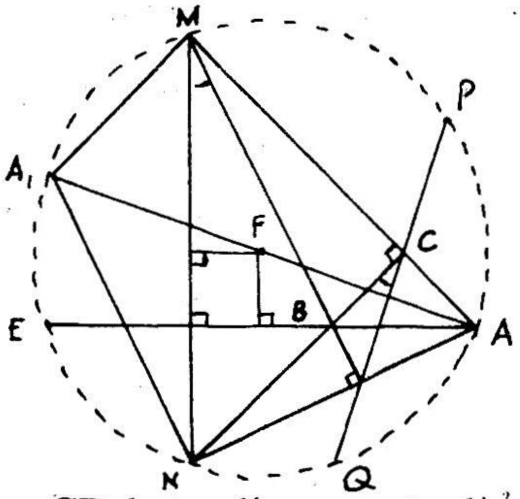
$$\overline{HM}.\overline{HN} = \overline{HA}.\overline{HE}$$

Do: H, A, E cố định ⇒ $\overline{HM}.\overline{HN} = \text{cosst.}$

Gọi I, J là giao điểm của đường tròn đường kính MN với đường thẳng AB. Do AB ⊥ MN ⇒ HI = HJ, và theo hệ thức lượng trong đường tròn này ta có:

$$\overline{HI}.\overline{HJ} = \overline{HM}.\overline{HN} \Rightarrow HI^2 = HJ^2 = -\overline{HM}.\overline{HN} = \text{cosst.}$$

⇒ I, J cố định ⇒ đ.p.c.m..



2. Giả sử CD∩AB = K. Theo hệ thức lượng trong đường tròn ta có:

$$\overline{KA}.\overline{KB} = \overline{KC}.\overline{KD} = \overline{KI}.\overline{KJ}$$

$$\Rightarrow \overline{KA}.\overline{KB} = \overline{KI}.\overline{KJ}$$

Vì A, B, I, J cố định ⇒ K cố định ⇒ CD luôn đi qua một điểm cố định ⇒ đ.p.c.m..

3. Do AA_1 là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN ⇒ $\widehat{AMA_1} = 90^0$. Mặt khác do B là trực tâm của tam giác AMN (Vì nó là giao của hai đường cao AH và MD) ⇒ NB ⊥ AM ⇒ MA_1 // NB.

Lí luận tương tự, ta có MB // NA_1 ⇒ MA_1NB là hình bình hành.

Tứ giác MCDN là tứ giác nội tiếp ⇒ $\widehat{BCD} = \widehat{BMN}$, $\widehat{BMN} = \widehat{MNA_1}$ (so le trong).

$\widehat{MNA_1} = \widehat{CAA_1}$ (cùng chắn cung MA_1)

⇒ $\widehat{BCD} = \widehat{CAA_1} \Rightarrow CD \perp AA_1$.

Do $CD \perp AA_1$, và AA_1 là đường kính $\Rightarrow AP = AQ$. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông APA_1, có $AP^2 = AQ^2 = \overline{AG}.\overline{AA_1}$. Do tứ giác A_1GKE nội tiếp, nên theo hệ thức lượng trong đường tròn có $\overline{AG}.\overline{AA_1} = \overline{AK}.\overline{AE}$. Cũng từ đó suy ra $AP = AQ = $ cosst. Vậy P,Q chạy trên đường tròn tâm A bán kính bằng $\sqrt{AK.AE}$

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 17. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và điểm A cố định ngoài đường tròn. Vẽ cát tuyến di động qua A, cắt lại đường tròn nói trên tại M, N. Hai đường tròn đường kính AM, AN cắt lại đường tròn (O, R) tại M_1, N_1. Giả sử $MM_1 \cap NN_1 = I$

Chứng minh rằng I luôn nằm trên đường tròn cố định.

BÀI GIẢI

Gọi $I = MM_1 \cap NN_1$.

Ta có: $\mathscr{P}_I(O) = \overline{IM_1}.\overline{IM} = \mathscr{P}_I(O_1)$ (1)

(Ở đây kí hiệu (O_1) là đường tròn đường kính AM, (O) là đường tròn (O,R))

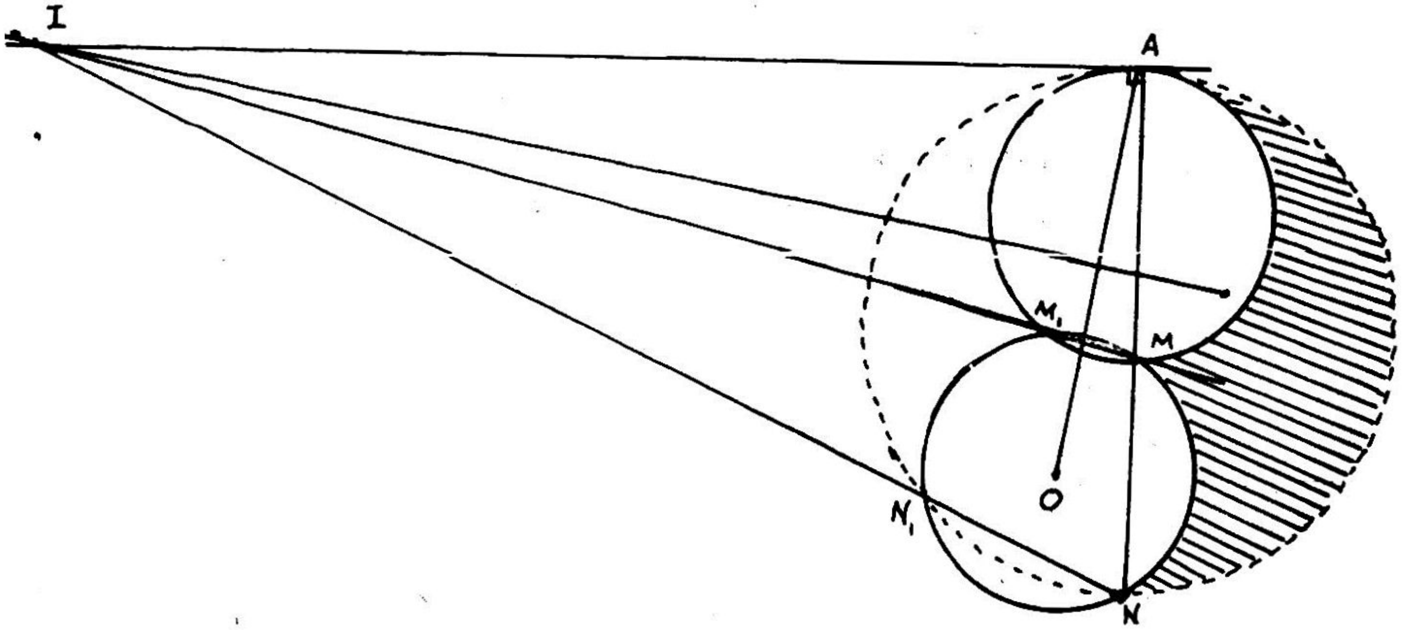
Lại có: $\mathscr{P}_I(O) = IN_1.IN = \mathscr{P}_I(O_2)$ (2)

(Ở đây kí hiệu (O_2)là đường tròn đường kính AN)

Từ (1)và (2) suy ra: $\mathscr{P}_I(O_1) = \mathscr{P}_I(O_2)$, vậy I nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1)và (O_2)

Nhớ lại trục đẳng phương là quĩ tích của những điểm M mà $MO_2^2\ MO_1^2 = R_2^2 - R_1^2$ (ở đây $R_2 = AN$, $R_1 = AM$). Đó là đường thẳng vuông góc với O_1O_2 tại điểm H trong đó nếu K là trung điểm của O_1O_2, thì:

$$\overline{KH} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2\overline{O_1O_2}} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2(R_2 - R_1)} = \frac{R_2 + R_1}{2}$$



Áp dụng vào đây suy ra trục đẳng phương này chính là tiếp tuyến với (O_1) tại A ⇒ $IA \perp AM$

Ta cũng có: $\mathscr{P}_I(O_1) = IA^2$ (3)

Theo trên thì $\mathscr{P}_I(O_1) = \mathscr{P}_I(O) = IO^2 - R^2$ (4)

Từ (3) (4) suy ra: $IA^2 = IO^2 - R^2$, hay

$$IO^2 - IA^2 = R^2 \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra I nằm trên đường thẳng ⊥ OA tại J, xác định bởi

$\overline{JE} = \dfrac{R^2}{2\overline{AO}}$, ở đây E là trung điểm của AO.

(tức là J nằm trên AO sao cho $JO^2 - JA^2 = R^2$).

Như thế I nằm trên đường thẳng cố định và đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 18. Cho đường thẳng Δ cố định và H là một điểm cố định trên Δ. Qua H kẻ đoạn SH ⊥ Δ với S cố định, A và B là hai điểm di động trên Δ. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của H lên SA, SB. Biết rằng A, B chạy nhưng luôn có:

$$\overline{HA}.\overline{HB} = -k^2 = \text{cosst.}$$

1. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác AMNB luôn đi qua hai điểm cố định.

2. Chứng minh rằng tâm của các đường tròn nói ở câu 1 nằm trên một đường thẳng cố định.

3. Chứng minh rằng các đường thẳng nối M, N luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI GIẢI

Do $\overline{HA}.\overline{HB} = -k^2 \Rightarrow$ A và B là hai điểm nằm khác phía với điểm H.

1. Theo hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAH và SHB, ta có:

$$\overline{SM}.\overline{SA} = SH^2 \qquad (1)$$

$$\overline{SN}.\overline{SB} = SH^2 \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\overline{SM}.\ \overline{SA} = \overline{SN}.\ \overline{SB}$

⇒ AMNB là tứ giác nội tiếp.

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMNB cắt SH tại E và F. Theo hệ thức lượng trong đường tròn này, ta có:

$$\overline{SE}.\ \overline{SF} = \overline{SM}.\ \overline{SA} \qquad (3)$$

Theo (1) suy ra $\overline{SE}.\ \overline{SF} = SH^2 \qquad (4)$

Do H nằm trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMNB, nên lại theo hệ thức lượng trong đường tròn ta có:

$$\overline{HE}.\ \overline{HF} = \overline{HA}.\ \overline{HB} = -k^2 \qquad (5)$$

Từ (4) (5) suy ra hệ sau đây:

$$\begin{cases} \overline{HE}\ .\ \overline{HF} = -k^2 & (6) \\ \overline{HE} + \overline{HF} = -\dfrac{k^2}{\overline{SH}} & (7) \end{cases}$$

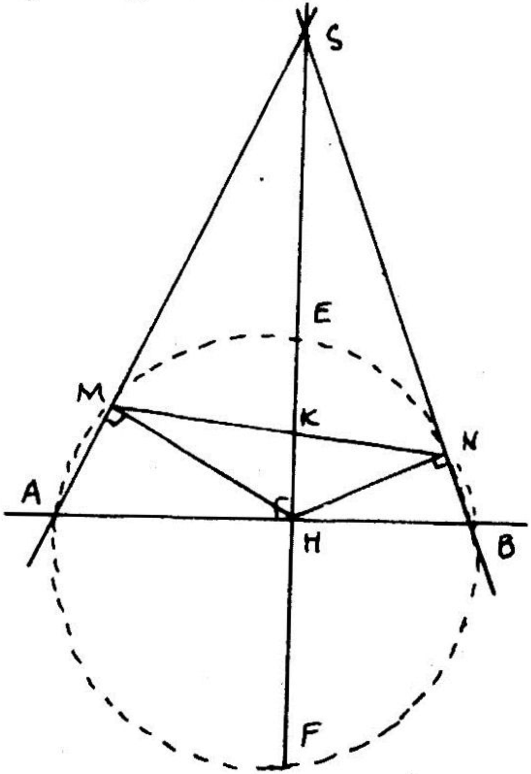
Theo định lí Viét, thì $\overline{HE}$ và $\overline{HF}$ là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 + k^2 t - \frac{k^2}{\overline{SH}} = 0 \qquad (*)$$

Rõ ràng (*) có nghiệm, và vì k và $\overline{SH}$ là các hằng số

⇒ $\overline{HE}$ và $\overline{HF}$ là các hằng số ⇒ E, F cố định (vì H cố định).

Vậy đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMNB luôn đi qua hai điểm cố định E, F.



2. Rõ ràng tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMNB nằm trên đường trung trực *l* của đoạn E, F. Từ câu 1 suy ra *l* cố định ⇒ đ.p.c.m..

3. Giả sử MN cắt SH tại K. Theo hệ thức lượng trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác SMHN, ta có:

$$\overline{KS}.\ \overline{KH} = \overline{KM}.\ \overline{KN} \qquad (8)$$

Nhưng trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMNB, ta lại có:

$$\overline{KM}.\,\overline{KN} = \overline{KE}.\,\overline{KF} \qquad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra: $\overline{KS}.\,\overline{KH} = \overline{KE}.\,\overline{KF}$ (10)

Do S, H, E, F cố định, vậy từ (10) suy ra K cố định.

⇒ Đường thẳng nối M, N luôn đi qua điểm K cố định

⇒ đ.p.c.m..

Ví dụ 19. 1) Cho A, B cố định và k là số dương nhỏ hơn 1. Tìm quỹ tích những điểm M trên mặt phẳng sao cho :

$$\frac{MA}{MB} > k \quad \left(\frac{MA}{MB} < k\right).$$

2) Cho M chạy trên đường thẳng Δ không vuông góc với AB, và A, B là hai điểm cố định không nằm trên Δ. Tìm những vị trí của M sao cho tỉ số $\frac{MA}{MB}$ đạt các giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

3) Cho ΔABC với AC < BC. Cho M chạy trên đường phân giác trong của $\widehat{C}$. Xác định M sao cho tỉ số $\frac{MA}{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

4) Cho điểm M chạy trên đường tròn Ω và hai điểm cố định A, B không nằm trên Ω. Giả sử tâm của đường tròn Ω không nằm trên đường thẳng nối A, B. Hãy xác định M sao cho tỉ số $\frac{MA}{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

BÀI GIẢI

1. Ta biết rằng quĩ tích những điểm M mà $\frac{MA}{MB} = k$ là đường tròn Apoloniut. Đó là đường tròn mà đường kính là đoạn thẳng nối điểm chia trong E và chia ngoài F đoạn AB theo tỉ số k.

(Tức là $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BF} = k$)

Vì $0 < k < 1 \Rightarrow$ A nằm bên trong đường tròn Apoloniut. Lấy M' là một điểm bất kỳ nằm ngoài đường tròn trên $\Rightarrow$ M'A phải cắt đường tròn tại điểm M_0 nào đó.

Trong tam giác $M_0M'B$ có: $M'B < M_0B + M_0M'$

$$\Rightarrow \quad \frac{M'A}{M'B} > \frac{M'A}{M_0B + M_0M'} = \frac{M_0A + M_0M'}{M_0B + M_0M'} \qquad (1)$$

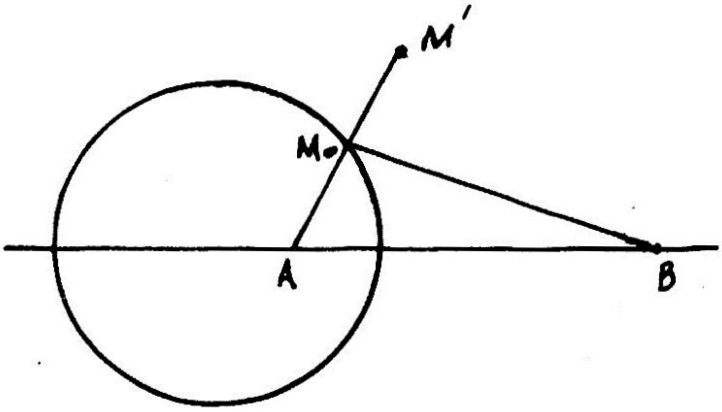
Do $\frac{M_0A}{M_0B} = k < 1$, nên theo tính chất cơ bản của bất đẳng thức ta có:

$$k = \frac{M_0A}{M_0B} < \frac{M_0A + M_0M'}{M_0B + M_0M'}$$

Vậy từ (1) suy ra $\frac{M'A}{M'B} > k$

Tương tự nếu M'' là điểm bất kỳ nằm trong đường tròn Apoloniut thì $\frac{M''A}{M''B} < k$

Tóm lại: Quĩ tích những điểm M nằm trên mặt phẳng sao cho $\frac{MA}{MB} > k$ là phần ngoài đường tròn Apoloniut, còn quĩ tích những điểm M nằm trên mặt phẳng sao cho:



$\frac{MA}{MB} < k$ là phần trong đường tròn Apoloniut.

Chú ý: Nếu k > 1 bằng cách làm hoàn toàn tương tự ta có kết quả tương tự như sau:

- Quĩ tích những điểm M nằm trên mặt phẳng sao cho $\frac{MA}{MB} > k$ *là phần trong đường tròn Apoloniut, còn quĩ tích những điểm M nằm trên mặt phẳng sao cho* $\frac{MA}{MB} < k$ *là phần ngoài đường tròn Apoloniut.*

2. Theo giả thiết Δ không vuông góc với đường thẳng AB. Vẽ đường tròn tâm O qua A và B, ở đây O là giao điểm của đường trung trực của đoạn AB với Δ. Giả sử đường tròn này cắt Δ tại hai điểm M1, M2. Vẽ tiếp tuyến với đường tròn này tại M1, và giả sử tiếp tuyến này cắt AB tại I. Đường tròn tâm I, bán kính IM1 cắt đường thẳng AB ở P và Q. Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có:
$IM_1^2 = \overline{IA}.\overline{IB} \Rightarrow IP^2 = \overline{IA}.\overline{IB}$ (2)

Hệ thức (2) chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, P, Q lập thành hàng điểm điều hòa (theo hệ thức Newton) ⇒ Đường tròn tâm I, bán kính IM1 là đường tròn Apoloniut của cặp điểm A, B với tỷ số

$$k = \frac{M_1A}{M_1B}$$

Vì M_1, M_2 ở hai phía khác nhau với trung trực đoạn AB, nên trong hai tí số $\frac{M_1A}{M_1B}$ và $\frac{M_2A}{M_2B}$ có một cái nhỏ hơn 1, và một cái lớn hơn 1.

Không giảm tổng quát giả sử $\frac{M_1A}{M_1B} < 1$; (khi đó $\frac{M_2A}{M_2B} > 1$)

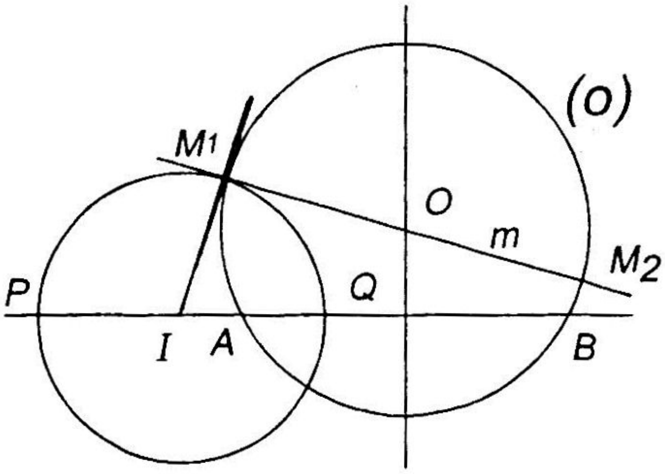
Dễ thấy mọi điểm M trên Δ mà $M \neq M_2$ đều nằm ngoài đường tròn Apoloniut trên .

Theo phần **1**. Suy ra: $\dfrac{MA}{MB} > \dfrac{M_1A}{M_1B}$ (3)

Chú ý là $\dfrac{M_2B}{M_2A} < 1$, nên $\forall M \in \Delta$ mà $M \neq M_2$, lại theo phần **1** suy ra :

$$\frac{MB}{MA} > \frac{M_2B}{M_2A}$$

hay $\dfrac{MA}{MB} < \dfrac{M_2A}{M_2B}$ (4)



Từ (3) (4) suy ra:

$$\max_{M \in \Delta} \frac{MA}{MB} = \frac{M_2A}{M_2B} \quad \text{và} \min_{M \in \Delta} \frac{MA}{MB} = \frac{M_1A}{M_1B}$$

3. Xét tam giác ABC có BC > AC. Vẽ đường phân giác trong của góc C. Đường này cắt AB ở E. Theo định lí đường phân giác, ta có: $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{AC}{AB}$ và do $BC > AC \Rightarrow EB > EA$.

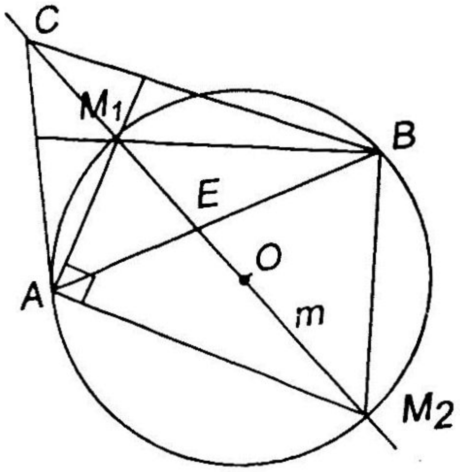
Áp dụng phần **2** với Δ là đường phân giác trong của góc C. Vẽ đường tròn tâm O và qua A, B (như phần **2**, O là giao điểm của đường trung trực của AB với đường phân giác của góc C). Đường tròn này cắt đường phân giác tại M_1, M_2. Theo phần **2.** ta có:

$$\text{Min} \frac{MA}{MB} = \frac{M_1A}{M_1B}$$

$$\text{Max}\ \frac{MA}{MB} = \frac{M_2A}{M_2B}$$

(Ở đây xét khi M chạy trên đường phân giác của C).

Theo kết quả ở câu 2. thì thấy ngay M_1 là tâm đường tròn nội tiếp, còn M_2 chính là tâm đường tròn bàng tiếp góc C.



Như vậy $\frac{MA}{MB}$ đạt giá trị bé nhất khi M là tâm đường tròn nội tiếp Δ ABC, còn đạt giá trị lớn nhất khi M là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác.

4. Vẽ đường tròn ($\mathscr{C}$) qua A, B và trực giao với đường tròn Ω. Giả sử ($\mathscr{C}$) cắt (Ω) tại M_1, M_2. Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB với tiếp tuyến tại M_1 của đường tròn ($\mathscr{C}$). Nếu vẽ đường tròn tâm I bán kính IM_1 và giả sử đường tròn này cắt AB ở P và Q, thì ta có:

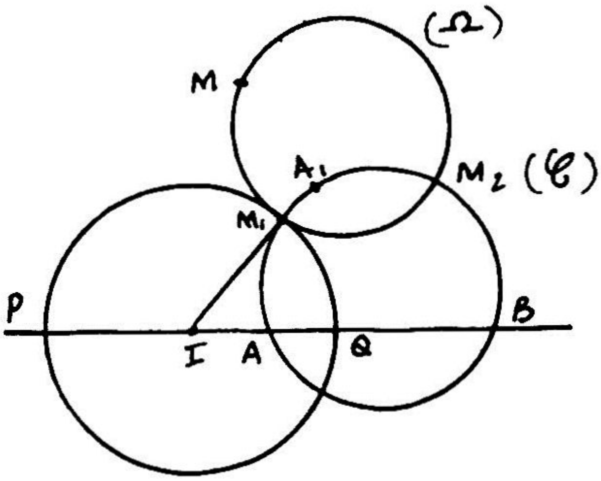
$$IM_1^2 = IA.IB \qquad \text{hay} \quad IP^2 = IA.IB$$

Hệ thức này chứng tỏ rằng các điểm A, B, P, Q lập thành hàng điểm điều hoà (theo hệ thức Newton) ⇒ đường tròn ($\mathscr{C}$) là đường tròn Apoloniut của cặp điểm A, B ứng với tỉ số $\frac{M_1A}{M_1B}$. Vì hai đường tròn Ω và đường tròn tâm I bán kính IM_1 đều trực giao với đường tròn ($\mathscr{C}$) tại M_1, nên chúng tiếp xúc với nhau tại M_1

$\Rightarrow$ đường tròn Ω nằm về một phía của đường tròn (I, IM_1) (trên hình vẽ đường tròn Ω nằm ngoài (I, IM_1)), nên $\forall\ M \neq M_1$ trên đường tròn (I, IM_1) ta đều có:

$$\frac{MA}{MB} > \frac{M_1A}{M_1B} \qquad \text{hoặc } \frac{MA}{MB} < \frac{M_1A}{M_1B}.$$

Như vậy tức là tỉ số $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất tại M_1 và cũng tương tự như vậy với điểm M_2.



Nếu giả sử $\dfrac{M_1A}{M_1B} < \dfrac{M_2A}{M_2B}$ thì M_1 ứng với giá trị nhỏ nhất, M_2 ứng với giá trị lớn nhất.

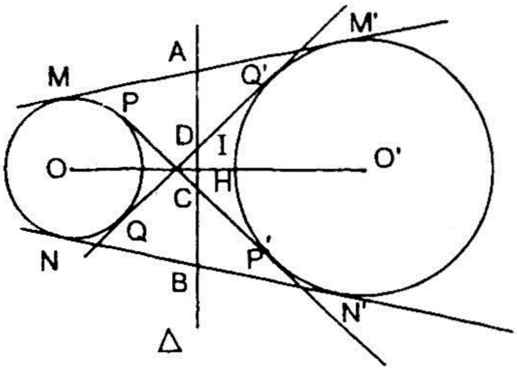
Ví dụ 20. 1/ Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') $(R' > R)$ ở ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài MM', NN' và các tiếp tuyến chung trong PP', QQ' (M, N, P, Q thuộc (O, R), còn M', N', P', Q' thuộc (O', R')). Gọi A, B, C, D tương ứng là trung điểm của MM', NN', PP', QQ'. Chứng minh A, B, C, D thẳng hàng.

2/ Cho nửa đường tròn đường kính AB và M thuộc nửa đường tròn ấy. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB. Đường tròn đường kính MH cắt MA tại P, MB tại Q và AB tại điểm thứ hai E. Chứng minh AB, PQ, ME đồng quy.

BÀI GIẢI

1. Ta có do AM và AM' là tiếp tuyến với các đường tròn (O, R) và (O', R'), nên ta có $\mathscr{P}_A(o) = AM^2$; $\mathscr{P}_A(o') = AM'^2$

Vì AM = AM' $\Rightarrow \mathscr{P}_A(o) = \mathscr{P}_A(o')$



$\Rightarrow$ A $\in$ Δ; ở đây Δ là trục đẳng phương của hai đường tròn (O, R) và (O', R').

Lí luận tương tự có B, C, D $\in$ Δ

$\Rightarrow$ A, B, C, D thẳng hàng $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

2. Do $\widehat{HPM} = \widehat{HQM} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông MAH và BHM có:

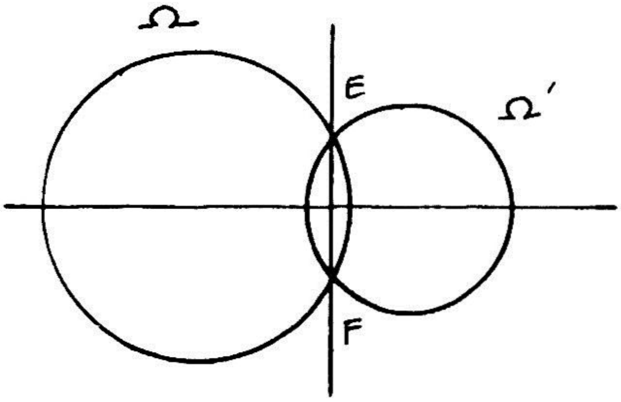
$$\overline{MP}.\overline{MA} = MH^2$$

$$\overline{MQ}.\overline{MB} = MH^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{MP}.\overline{MA} = \overline{MQ}.\overline{MB} \qquad (1)$$

Theo hệ thức lượng trong đường tròn, từ (1) suy ra APQB là tứ giác nội tiếp.

Chú ý rằng nếu hai đường tròn Ω và Ω' cắt nhau tại E, F thì đường thẳng đi qua E, F chính là trục đẳng phương của Ω và Ω' (vì $\mathscr{P}_E(\Omega) = \mathscr{P}_E(\Omega') = \mathscr{P}_F(\Omega) = \mathscr{P}_F(\Omega') = 0$).



Áp dụng nhận xét trên suy ra đường thẳng nối P, Q là trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp tứ giác APQB và ngoại tiếp tam giác MEH.

Dễ thấy AEMB là tứ giác nội tiếp (vì từ M và E cùng nhìn AB dưới một góc vuông). Do vậy cũng theo nhận xét trên thì đường thẳng nối M, E là trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEMB và ngoại tiếp tam giác MEH.

Giả sử ME $\cap$ PQ = I $\Rightarrow$ I nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AEMB và APQB.

Nhưng lại theo nhận xét trên thì đường thẳng nối A, B chính là trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác nói trên. Điều đó có nghĩa là ME, PQ, AB đồng qui.

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 21. Cho đường thẳng Δ cố định. M là một điểm di động trên Δ. Cho (O, r) là một đường tròn cố định không cắt Δ. Vẽ các tiếp tuyến MP, MQ với (O, r). Chứng minh rằng khi M chạy trên Δ, thì đường thẳng nối P, Q luôn đi qua một điểm cố định

BÀI GIẢI

Kẻ OH $\perp$ Δ. Giả sử OM $\cap$ PQ = I. Theo tính chất của hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm, ta có OM $\perp$ PQ.

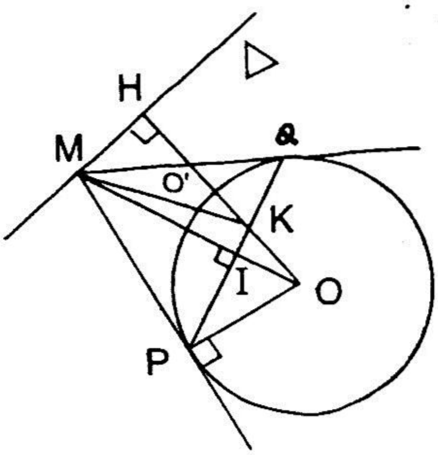
Giả sử OH $\cap$ PQ = K.

Dễ thấy MIKH là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O' (O' là trung điểm của đường kính MK của đường tròn này). Ta có :

$\mathscr{P}_O(o')(1) = \overline{OI}.\overline{OM} = \overline{OK}.\overline{OH}$ (1)

Trong tam giác vuông MPO, ta có $\overline{OI}.\overline{OM} = OP^2 = r^2$ (2)

Vậy từ (1) (2) suy ra: $\overline{OK}.\overline{OH} = r^2$



$$\Rightarrow \overline{OK} = \frac{r^2}{\overline{OH}} = \text{cosnt}$$

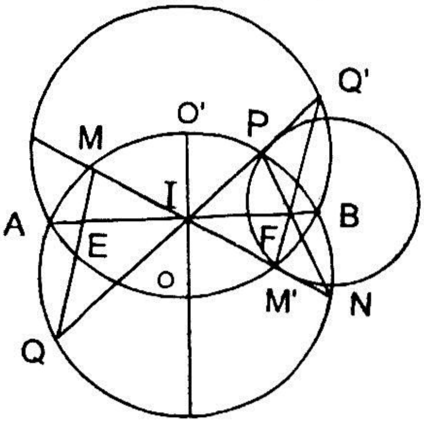
(do O, H cố định) ⇒ K cố định

⇒ đường thẳng nối P, Q luôn đi qua

một điểm cố định ⇒ đ.p.c.m..

Ví dụ 22. Cho đường tròn (O, R) với dây AB. Gọi I là trung điểm của AB. Qua I vẽ hai dây MN và PQ. Giả sử MQ, NP lần lượt cắt AB tại E và F. Chứng minh IE = IF *(bài toán"con bướm")*.

BÀI GIẢI



Lấy M', Q' đối xứng với M, Q qua I. Ta có Q'M' đối xứng với QM qua I.

Do A, B đối xứng với nhau qua I nên Q'M' cắt IB tại điểm F' đối xứng với E qua I hay IF" = IE (1)

Mặt khác cũng do A, B đối xứng với nhau qua I nên A, B, M', Q' theo thứ tự đối xứng với B, A, M, Q qua I. Mà B, A, M, Q nằm trên đường tròn (O) nên A, B, M', Q' nằm trên đường tròn (O') đối xứng với (O) qua I. Hơn nữa do hai dây MN, PQ của (O) cắt nhau tại I nên $\overline{IM}.\overline{IN} = \overline{IP}.\overline{IQ}$. Mà $\overline{IM'} = -\overline{IM}$; $\overline{IQ'} = -\overline{IQ}$ nên $\overline{IM'}.\overline{IN} = \overline{IP}.\overline{IQ'}$, bốn điểm M', N, Q', P nằm trên một đường tròn (gọi là đường tròn (O")). Do AB là trục đẳng phương của (O), (O'); PN là trục đẳng phương của (O), (O"); Q'M' là trục đẳng phương của (O'), (O") và Q'M' cắt AB tại F' nên PN đi qua F' (xem ví dụ 20). Mà PN cắt AB tại F nên F' ≡ F. Từ (1), ta có IF = IE (đ.p.c.m)..

Chú ý. *Với bài toán "con bướm", trên đây chỉ là một cách giải. Người ta có thể giải bài toán này chẳng hạn sử dụng các kiến thức về tứ giác nội tiếp và tam giác đồng dạng, hoặc sử dụng phương pháp toạ độ.*

Ví dụ 23. *(Định lý Pascal).*

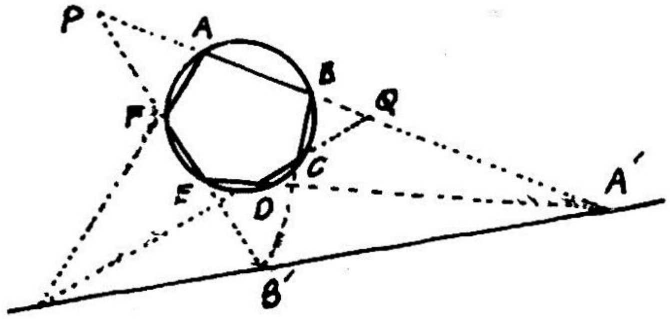
Cho một hình lục giác nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh rằng ba giao điểm của ba cặp cạnh đối diện sẽ nằm trên một đường thẳng (đường thẳng đó gọi là đường thẳng Pascal).

BÀI GIẢI

Giả sử ABCDEF là một lục giác nội tiếp trong một đường tròn. Các cặp cạnh đối diện là AB và DE , BC và EF , CD và FA cắt nhau theo thứ tự tại A', B', C'.

Gọi P = AB ∩ EF, Q = AB ∩ CD, R = CD ∩ EF. Áp dụng định lý Ménélauýt đối với tam giác PQR và các cát tuyến BCB', DEA', CDC' ta lần lượt có các hệ thức:

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{B'R}}{\overline{B'P}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}=1\ ,\quad \frac{\overline{DQ}}{\overline{DR}}\cdot\frac{\overline{ER}}{\overline{EP}}\cdot\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'Q}}=1\ ,\quad \frac{\overline{C'Q}}{\overline{C'R}}\cdot\frac{\overline{FR}}{\overline{FP}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}=1$$



Nhân các vế của ba đẳng thức trên với nhau và lưu ý rằng phương tích của các điểm P, Q, R đối với đường tròn ngoại tiếp lục giác ta có:

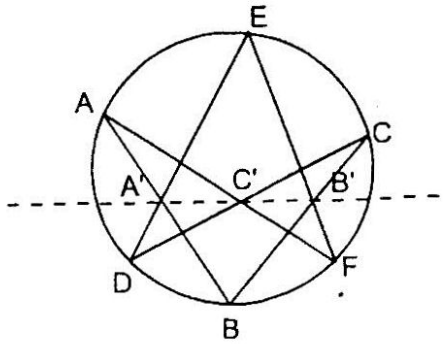
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{FQ}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{EP}}=1\ ,\quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{DQ}}=1\ ,\quad \frac{\overline{CR}}{\overline{ER}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{FR}}=1$$

và ta có: $$\frac{\overline{B'R}}{\overline{B'Q}}\cdot\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'Q}}\cdot\frac{\overline{C'Q}}{\overline{C'R}}=1$$

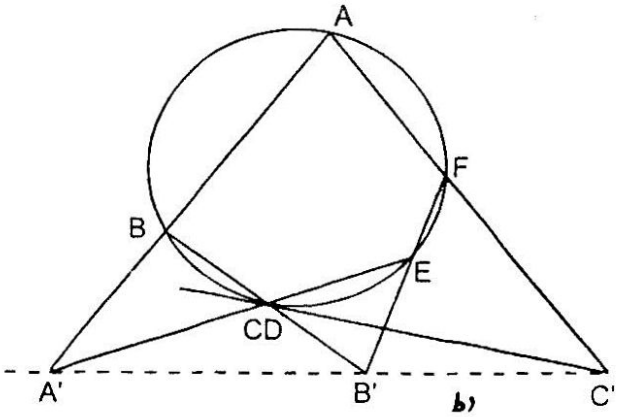
Hệ thức này chứng tỏ rằng ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Chú ý: *Đối với mọi lục giác nội tiếp đường tròn mà không phải là lục giác lồi định lí Pascal vẫn đúng. Ngoài ra định lí Pascal vẫn đúng trong trường hợp lục giác suy biến thành ngũ giác, tứ giác hoặc tam giác và khi đó xem cạnh do một cặp, hai cặp hay ba cặp đỉnh trùng nhau là tiếp tuyến tại các cặp điểm trùng nhau đó.*

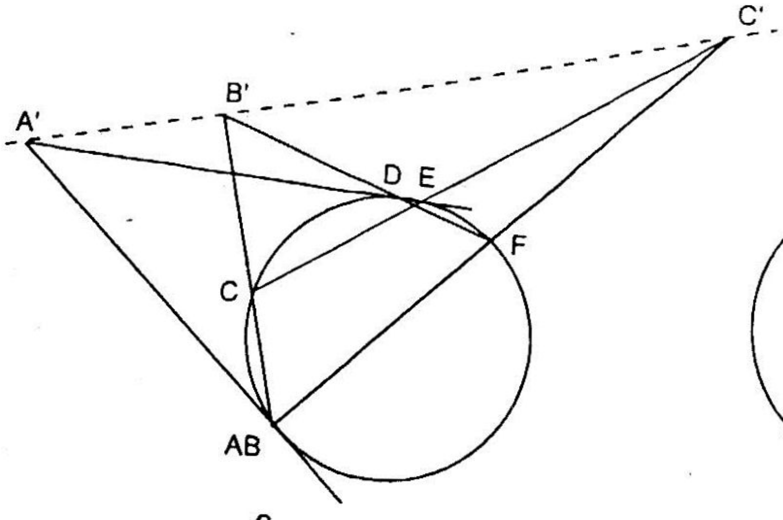
Các trường hợp đặc biệt được minh họa bằng các hình vẽ sau đây (H a,b,c,d).



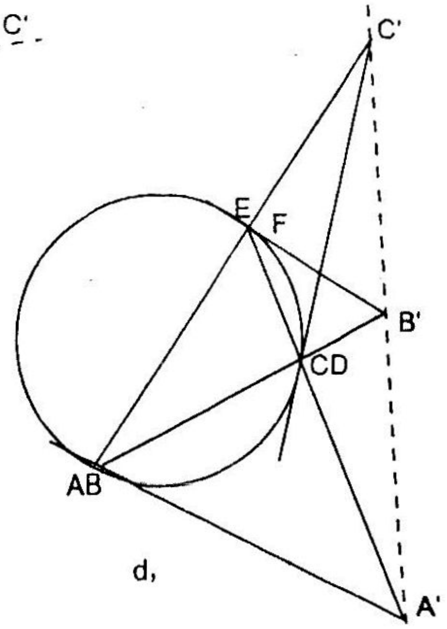
a,



b)



c,



d,

Chương IV

PHÉP QUAY

§1. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Cho trước điểm O và góc α ($0^0 \le \alpha \le 180^0$). Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, và một điểm M (M ≠O) thành điểm M' sao cho OM' = OM , $\widehat{M'OM} = \alpha$ và di chuyển từ $\overrightarrow{OM}$ đến $\overrightarrow{OM'}$ theo chiều quay ngược chiều kim đồng hồ, được gọi là phép quay $R^+(O, \alpha.)$..

(Nếu chiều di chuyển từ $\overrightarrow{OM}$ đến $\overrightarrow{OM'}$ theo chiều quay thuận chiều kim đồng hồ, được gọi là phép quay $R^-(O, \alpha)$).

- Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay, chiều di chuyển từ $\overrightarrow{OM}$ đến $\overrightarrow{OM'}$ gọi là chiều quay.

- Với phép quay biến M thành M' quanh tâm O, góc quay α và chiều quay ngược chiều kim đồng hồ (thuận chiều kim đồng hồ) được kí hiệu là:

$$M \xrightarrow{R^+(O,\alpha)} M' \qquad\qquad M \xrightarrow{R^-(O,\alpha)} M'$$

Các tính chất cơ bản của phép quay

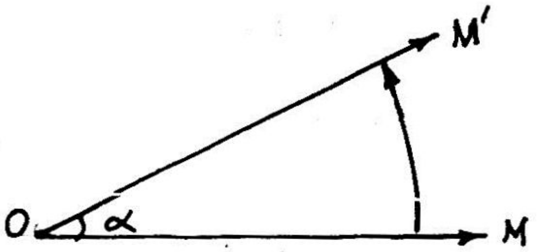
1. Nếu:

$$\begin{array}{l} M \xrightarrow{R(O,\alpha)} M' \\ N \xrightarrow{\hspace{3em}} N' \end{array}$$

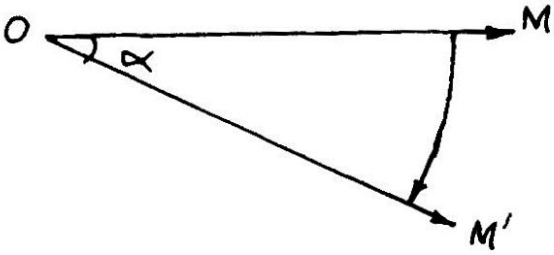
thì ta có M'N' = MN và $(\widehat{MN, M'N'}) = \alpha$ (ở đây khi dùng kí hiệu R (O, α) ta hàm ý điều này đúng với cả phép quay nghịch và thuận chiều kim đồng hồ).

2. Phép quay biến ba điểm M, N,P thẳng hàng thành ba điểm M', N', P' thẳng hàng.

3. Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng, đa giác, đường tròn,... thành hình bằng nó.



$$M \xrightarrow{R^{+}(O,\alpha)} M'$$

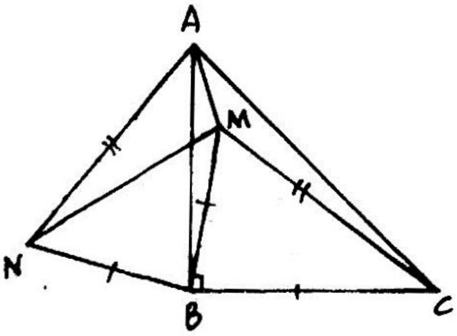


$$M \xrightarrow{R^{-}(O,\alpha)} M'$$

§2. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác vuông cân ABC ($B = 90^0$) và điểm M trong tam giác sao cho MA: MB: MC = 1: 2: 3. Tính $\widehat{AMB}$.

BÀI GIẢI



Xét phép quay $R^{+}(B, 90^0)$ giả sử trong phép quay này $M \to N$ (còn dĩ nhiên $C \to A$)

Do MA: MB : MC = 1: 2: 3, nên nếu đặt MA = x, thì

MB = 2x, MC = 3x.

Vì $M \to N$; $C \to A$ $\Rightarrow$ $MC \to NA \Rightarrow NA = MC = 3x$.

Do : $M \xrightarrow{R^{+}(B,90^0)} N$

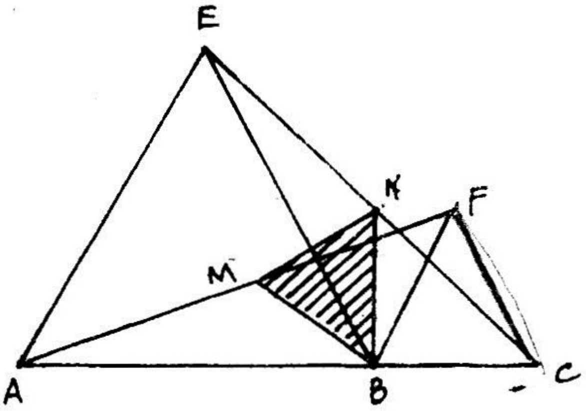
nên theo định lí Pitago trong tam giác vuông MBN, có :

$MN^2 = MB^2 + BN^2 = 8x^2 \Rightarrow AN^2 = AM^2 + MN^2 \Rightarrow \widehat{AMN} = 90^0$

Vậy: $\widehat{AMB} = 135^0$.

Ví dụ 2. Cho ba điểm A,B,C theo thứ tự trên thẳng hàng. Về cùng một phía dựng hai tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N tương ứng là hai trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng BMN là tam giác đều

BÀI GIẢI



Xét phép quay $R^{-}(B,60^0)$. Ta có :

$$A \xrightarrow{R^{-}(B,60^0)} E$$

$$F \longrightarrow C$$

Vậy theo tính chất của phép quay thì

$$AF \xrightarrow{R^{-}(B,60^0)} EC$$

Do M là trung điểm của AF, N là trung điểm của EC

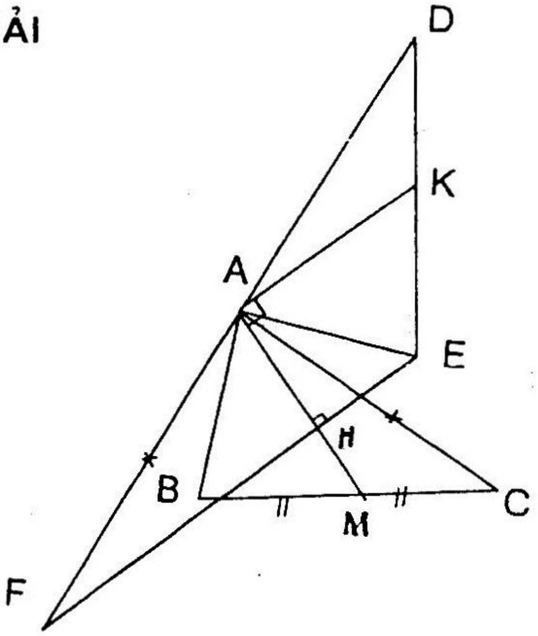
$$\text{nên } M \xrightarrow{R^{-}(B,60^0)} N \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra BM = BN và $\widehat{MBN} = 60^0$

$\Rightarrow$ BMN là tam giác đều $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Qua điểm A dựng hai tam giác vuông cân ABE và ACF. Gọi M là trung điểm của BC và giả sử $AM \cap FE = H$. Chứng minh AH là đường cao của tam giác AEF.

BÀI GIẢI



Xét phép quay $R^+(A,90^0)$. Kéo dài FA một đoạn AD=AF. Chú ý rằng do AF = AC ⇒ AC = AD. Từ giả thiết suy ra:

$$B \xrightarrow{R^+(A,90^0)} E$$

$$C \longrightarrow D$$

Theo tính chất của phép quay, nếu gọi K là trung điểm của DE, thì $M \xrightarrow{R^+(A,90^0)} K$

Vì thế theo định nghĩa của phép quay, thì $MA \perp AK$ (1)

Trong tam giác DFE, vì AK là đường trung bình nên AK // FE (2)

Từ (1) (2) suy ra $AM \perp FE$ ⇒ AH là đường cao của tam giác AEF ⇒ đ.p.c.m..

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Tìm trên mặt phẳng chứa tam giác điểm M trong tam giác sao cho tổng MA + MB + MC đạt giá trị bé nhất.

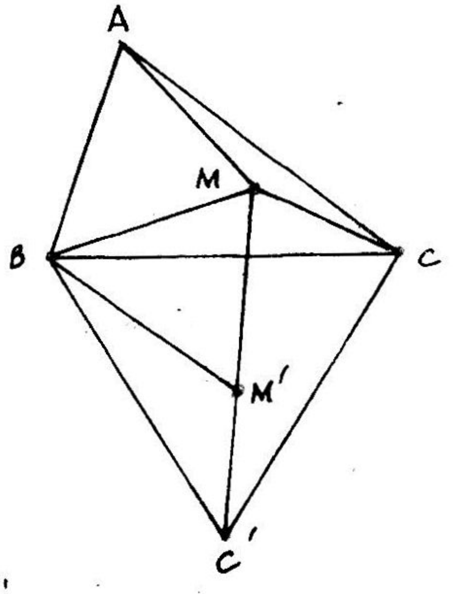
BÀI GIẢI

Giả sử M là điểm tùy ý trong tam giác ABC.

Xét phép quay $R^-(B,60^0)$

Giả sử trong phép quay này, thì:

$$C \xrightarrow{R^-(A,60^0)} C'$$
$$M \longrightarrow M'$$



Theo định nghĩa của phép quay thì BM = BM' và $\widehat{MBM'} = 60^0$

⇒ MBM' là tam giác đều

⇒ BM = MM' (1) . Theo tính chất của phép quay thì : $CM \xrightarrow{R^-(B,60^0)} C'M'$

Do đó CM = C'M' (2)

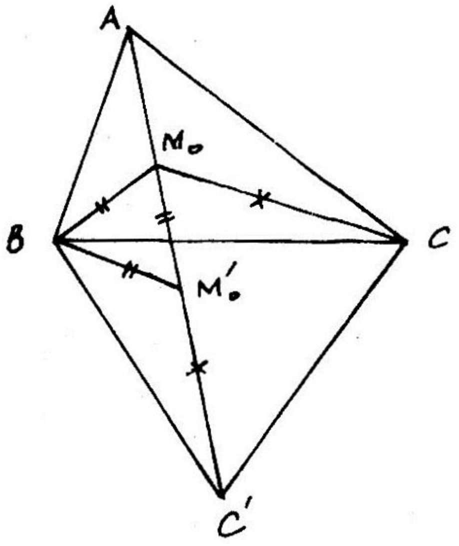
Từ (1) (2) suy ra: MA + MB + MC = AM + MM' + M'C' (3)

Chú ý rằng với mọi điểm M thì C' là điểm cố định. Vậy từ (3) suy ra với mọi vị trí điểm M trong tam giác ABC, ta luôn có:

$$MA + MB + MC \geq AC' \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \qquad \min(MA + MB + MC) = AC'$$

Dấu bằng trong (4) đạt được khi A, M, M', C' thẳng hàng. Ta xem khi đó M là điểm nào?



Giả sử M_0 là điểm thỏa mãn điều kiện này (A, M_0, M_0', C' thẳng hàng) ta có:

$$M_0 \xrightarrow{R^-(A,60^0)} M'_0$$
$$C \longrightarrow C'$$

⇒ $M_0C \longrightarrow M_0'C'$ trong phép quay $R^-(B,60^0)$

⇒ $(\widehat{M_0C, M_0'C'}) = 60^0$. Vì $\Delta\ BM_0M_0'$ đều ⇒ $\widehat{BM_0M_0'} = 60^0$ ⇒ $\widehat{BM_0C} = 120^0$

Lại có $\widehat{AM_0B} = 120^0 \Rightarrow \widehat{AM_0C} = 120^0 \Rightarrow M_0$ là giao 3 cung chứa góc 120^0 dựng trên 3 cạnh BC, AC, AB.

Vậy điểm cần tìm là điểm M_0 xác định như trên. Điểm M_0 ấy được gọi là điểm **Toriselli.**

Chú ý: *Áp dụng ví dụ 4, ta có thể giải được bài toán sau đây: Bốn xã có vị trí ở bốn đỉnh của một hình vuông có độ dài cạnh bằng 10km. Người ta muốn xây dựng một hệ thống đường liên xã sao cho từ bất kì một xã nào cũng có thể dẫn đến bất cứ một xã khác. Hỏi tổng độ dài các con đường ngắn nhất là bao nhiêu?*

BÀI GIẢI

Từ ví dụ trên suy ra nhận xét sau:

Nhận xét: Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Dựng tam giác đều BCD về phía ngoài tam giác ABC. Khi đó ta có:

$$MA + MB + MC \geq AD$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ M là giao điểm AD với đường tròn ngoại tiếp ΔBCD (M chính là điểm Toriselli của ΔABC).

Áp dụng vào bài toán của ta:

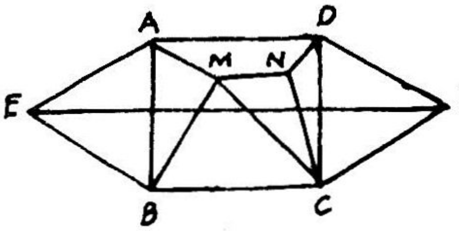
Dựng về phía ngoài hình vuông hai tam giác đều ABE và DCF.

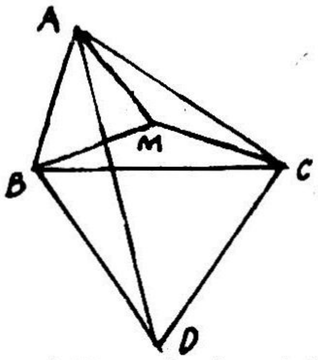
Giả sử con đường xây dựng là con đường bao gồm các đoạn AM, BM, MN, ND, NC. Áp dụng nhận xét vào ΔMCD, ta có:

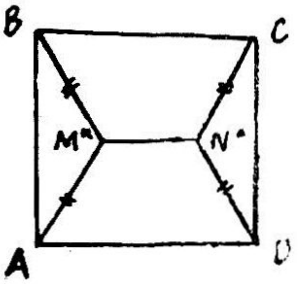
$$NM + ND + NC \geq MF \ (1)$$

Áp dụng nhận xét vào ΔABF ta có: $MA + MB + MF \geq EF$ (2)

Từ (1) (2) suy ra nếu gọi ***l*** là tổng độ dài của các con đường, thì:







$$l = MA + MB + NM + ND + NC \geq MA + MB + MF \geq EF.$$

Vậy mọi con đường l đều có độ dài:

$$l \geq EF = 10 + 2.\ \frac{10\ .\ \sqrt{3}}{2} = 10.\ (1 + \sqrt{3})\ \text{km}$$

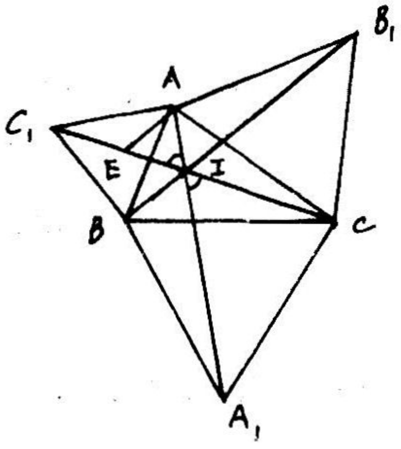
Mặt khác nếu chọn 2 điểm M*, N* như sau (xem hình vẽ), thì độ dài con đường tương ứng.

$$l^* = M^*A + M^*B + M^*N + N^*C + N^*D = 10.\ (1 + \sqrt{3})\ \text{km}$$

$$(\widehat{ABM^*} = \widehat{BAM^*} = \widehat{N^*CD} = \widehat{N^*DC} = 30^o).$$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui.

BÀI GIẢI



Giả sử $AA_1 \cap CC_1 = I$ xét phép quay $R^+(B, 60^0)$ theo giả thiết suy ra:

$$A_1 \xrightarrow{R^+(B,\ 60^0)} C$$

$$A \longrightarrow C_1$$

Vậy theo tính chất phép quay suy ra : $A_1A \rightarrow CC_1$

$(\widehat{A_1A\ ,\ CC_1}) = 60^0$, tức là $\widehat{AIC_1} = 60^0$ (1)

Lấy trên CC_1 điểm E sao cho : $IE = IA$.

Vì $\widehat{EIA} = 60^0 \Rightarrow \Delta\ EIA$ đều

Xét phép quay $R^{-}(A, 60^0)$, ta có :

$$B \xrightarrow{R^{-}(A,\ 60^0)} C_1$$

$$I \longrightarrow E$$

$$B_1 \longrightarrow C$$

Vậy $$BIB_1 \xrightarrow{R^{-}(A,\ 60^0)} C_1EC \qquad (2)$$

Do C_1, E, C thẳng hàng, nên từ (2) suy ra B, I, B_1 thẳng hàng. Điều đó có nghĩa là AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui $\Rightarrow$ đ.p.c.m.

Ví dụ 6. Cho lục giác đều ABCDEF

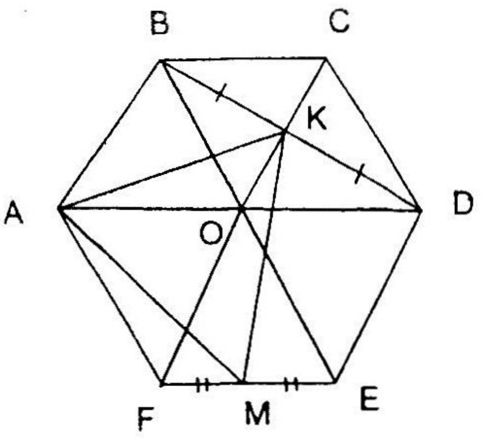
1. Gọi K là trung điểm của đường chéo BD, M là trung điểm của EF. Chứng minh AMK là tam giác đều.

2. Gọi M và H là trung điểm của CD và DE, còn L là giao điểm của AM và BH.

Chứng minh rằng $S_{ABL} = S_{MDHL}$

BÀI GIẢI

1. Gọi O là tâm của lục giác đều ABCDEF. Dễ thấy BCDO là hình thoi, vì vậy trung điểm K của BD chính là trung điểm của CO.



Vì ABCDEF là lục giác đều ⇒ AC = AE và $\widehat{CAE} = 60^0$. Xét phép quay $R^-(A, 60^0)$, từ các kết quả trên suy ra :

$$O \xrightarrow{R^-(A,\ 60^0)} F$$

$$C \longrightarrow E$$

Theo tính chất của phép quay suy ra:

$$OC \xrightarrow{R^-(A,\ 60^0)} FE \qquad (1)$$

Vì K, M tương ứng là trung điểm của CO và FE,

nên từ (1) suy ra : $K \xrightarrow{R^-(A,\ 60^0)} M$

Theo định nghĩa của phép quay ta có :

AK = AM và KMA = 60^0 ⇒ AMK là tam giác đều ⇒ đ.p.c.m..

2. Rõ ràng COD và DOE là hai tam giác đều bằng nhau .

⇒ OM = OH và $\widehat{MOH} = 60^0$.

Xét phép quay $R^-(O, 60^0)$

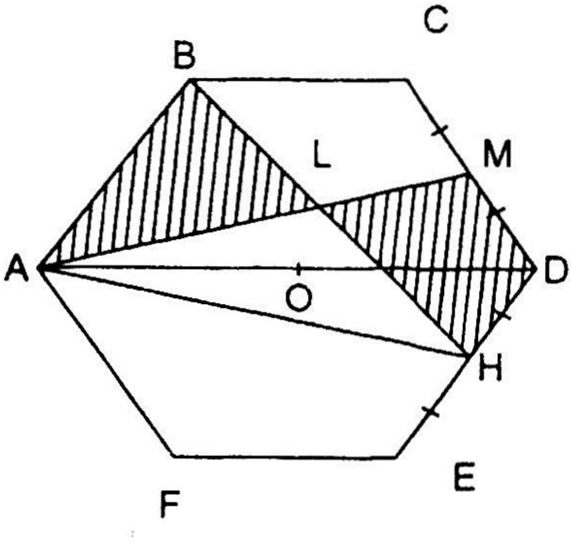
Ta có trong phép quay trên thì:

A → B

B → C

C → D

M → H



Theo tính chất phép quay thì :

$$\text{tứ giác } ABCM \xrightarrow{R^-(O,\ 60^0)} \text{tứ giác } BCDH$$

Nói riêng ta có : $S_{ABCM} = S_{BCDH}$

hay $S_{ABL} + S_{BCML} = S_{BCML} + S_{MDHL}$

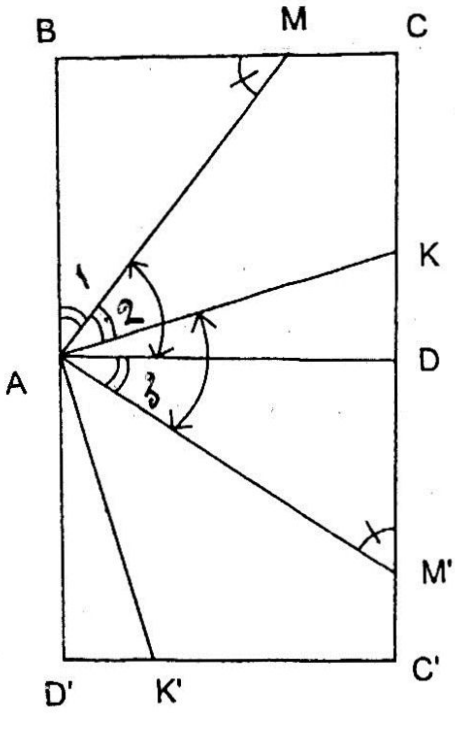
hay $S_{ABL} = S_{MDHL}$ Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 7. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh BC và CD lấy M và K tương ứng sao cho $\widehat{BAM} = \widehat{MAK}$.

Chứng minh : $BM + KD = AK$

BÀI GIẢI

Xét phép quay $R^-(A, 90^0)$, khi đó trong phép quay này B → D.



Giả sử:

$$M \xrightarrow{R^-(A,\ 90^0)} M'$$

$$K \longrightarrow K'$$

Chú ý rằng: $A \xrightarrow{R^-(A,\ 90^0)} A$

$\Rightarrow \qquad \widehat{BMA} \longrightarrow \widehat{DM'A}$

trong phép quay này:

$\Rightarrow \qquad \widehat{BMA} = \widehat{DM'A}$

Theo giả thiết $\widehat{MAK} = \widehat{MAB}$

Lại do $\widehat{MAB} = \widehat{M'AD}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \qquad \widehat{MAD} = \widehat{M'AK}$

Vì $\widehat{MAD} = \widehat{BMA}$ (so le trong).

Lại do $\widehat{BMA} \xrightarrow{R^-(A,\ 60^0)} \widehat{DM'A}$

$\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{DM'A} \qquad \Rightarrow \widehat{M'AK} = \widehat{DM'A} \qquad (1)$

(Trước hết chú ý rằng nếu gọi C' và D' tương ứng là ảnh của C và D trong phép quay trên, thì do $M \in BC \Rightarrow M' \in DC'$, và rõ ràng là C, D, C' thẳng hàng)

Từ (1) suy ra : $KA = KM' \qquad (2)$

Do $KM' = KD + DM'$, nên theo trên

$BM \xrightarrow{R^-(A,\ 90^0)} DM'$, nên $BM = DM'$

$\Rightarrow BM + KD = AK \qquad \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng hai hình vuông ACMN và BCPQ. Chứng minh rằng AQ, BN và đường cao CH của tam giác ABC đồng quy.

BÀI GIẢI

Gọi O_1 và O_2 tương ứng là tâm của hai hình vuông ACMN và BCPQ. Xét phép quay $R^+(O_1, 90^0)$.

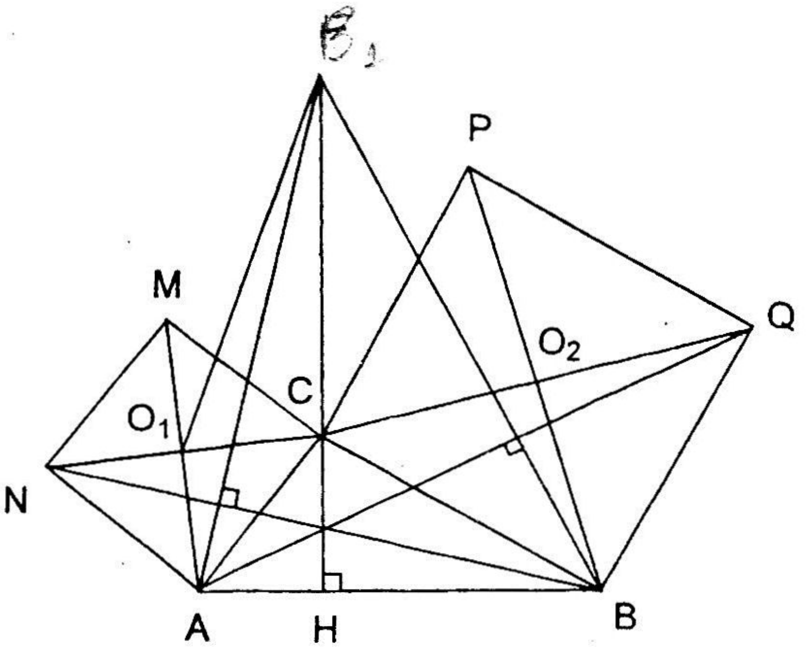
Trong phép quay này, thì : $N \to A$

$A \to C$

$B \to B_1$

Như vậy theo tính chất phép quay suy ra $AB \to CB_1$. Điều đó có nghĩa là $CB_1 \perp AB$ và $CB_1 = AB$. Vì $CH \perp AB$

$\Rightarrow$ H, C, B_1 thẳng hàng.



Cũng từ trên suy ra $NB \xrightarrow{R^+(O_1,\ 90^0)} AB_1 \Rightarrow NB \perp AB_1$

Xét phép quay $R^-(O_2, 90^0)$. Trong phép quay này, thì:

$$Q \to B$$

$$B \to C$$

$$A \to A_1$$

Như vậy $BA \to CA_1 \Rightarrow BA \perp CA_1$ và $BA = CA_1$

$\Rightarrow$ H, C, A_1 thẳng hàng. Điều đó chứng tỏ rằng $B_1 \equiv A_1$. Đặt điểm chung đó là E.

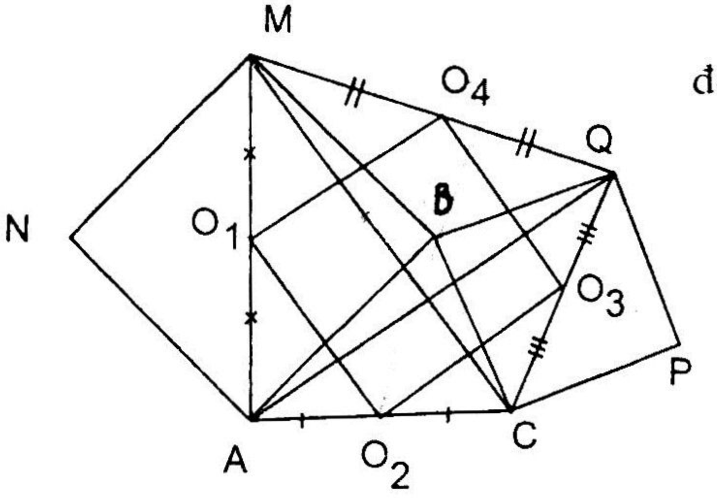
Ta còn có $QA \xrightarrow{R^-(O_2,\ 90^0)} BA_1 \Rightarrow QA \perp BA_1$

Do đó QA, BN, HE là ba đường thẳng chứa ba chiều cao của tam giác EAB, nên nó đồng quy $\Rightarrow$ đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và BC, về phía ngoài tam giác dựng hai hình vuông ABMN và BCPQ. Chứng minh rằng các tâm của các hình vuông này cùng với hai trung điểm của MQ, AC tạo thành một hình vuông.

BÀI GIẢI

Gọi O_1 và O_3 tương ứng là tâm của hai hình vuông ABMN và BCPQ, còn O_2 và O_4 tương ứng là trung điểm của AC và MQ.



Xét phép quay $R^+(B, 90^0)$, khi đó ta có :

$$M \xrightarrow{R^+(B,\ 90^0)} A$$

$$C \longrightarrow Q$$

Theo tính chất của phép quay

thì $MC \xrightarrow{R^+(B,\ 90^0)} AQ$

$\Rightarrow$ $MC = AQ$ và $MC \perp AQ$ (1)

Ta có O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1 lần lượt là đường trung bình của các tam giác MAC, ACQ, MCQ, MAQ

$$\Rightarrow \quad O_1O_2 \ /\!/ \ MC \text{ và } O_1O_2 = \frac{1}{2} MC$$

$$O_2O_3 \ /\!/ \ AQ \text{ và } O_2O_3 = \frac{1}{2} AQ$$

$$O_3O_4 \ /\!/ \ MC \text{ và } O_3O_4 = \frac{1}{2} MC$$

$$O_4O_1 \ /\!/ \ AQ \text{ và } O_4O_1 = \frac{1}{2} AQ$$

Từ (1) suy ra $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$

và $O_1O_2 \perp O_2O_3$

$\Rightarrow$ $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 10. Cho tứ giác lồi ABCD. Về phía ngoài tứ giác dựng 4 hình vuông ABMN, BCPQ, CDRS, DATU. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 tương ứng là tâm của bốn hình vuông ấy. Chứng minh rằng:

$$O_1O_3 \perp O_2O_4 \quad \text{và} \quad O_1O_3 = O_2O_4$$

BÀI GIẢI

Xét phép quay $R^+(A, 90^0)$. Khi đó trong phép quay này, ta có:

$$B \to N$$

$$T \to D$$

Vậy theo tính chất của phép quay, thì:

$$BT \xrightarrow{R^+(A,\, 90^0)} ND$$

$$\Rightarrow \quad BT \perp ND \text{ và } BT = ND \qquad (1)$$

Xét phép quay $R^-(C, 90^0)$. Trong phép quay này, ta có:

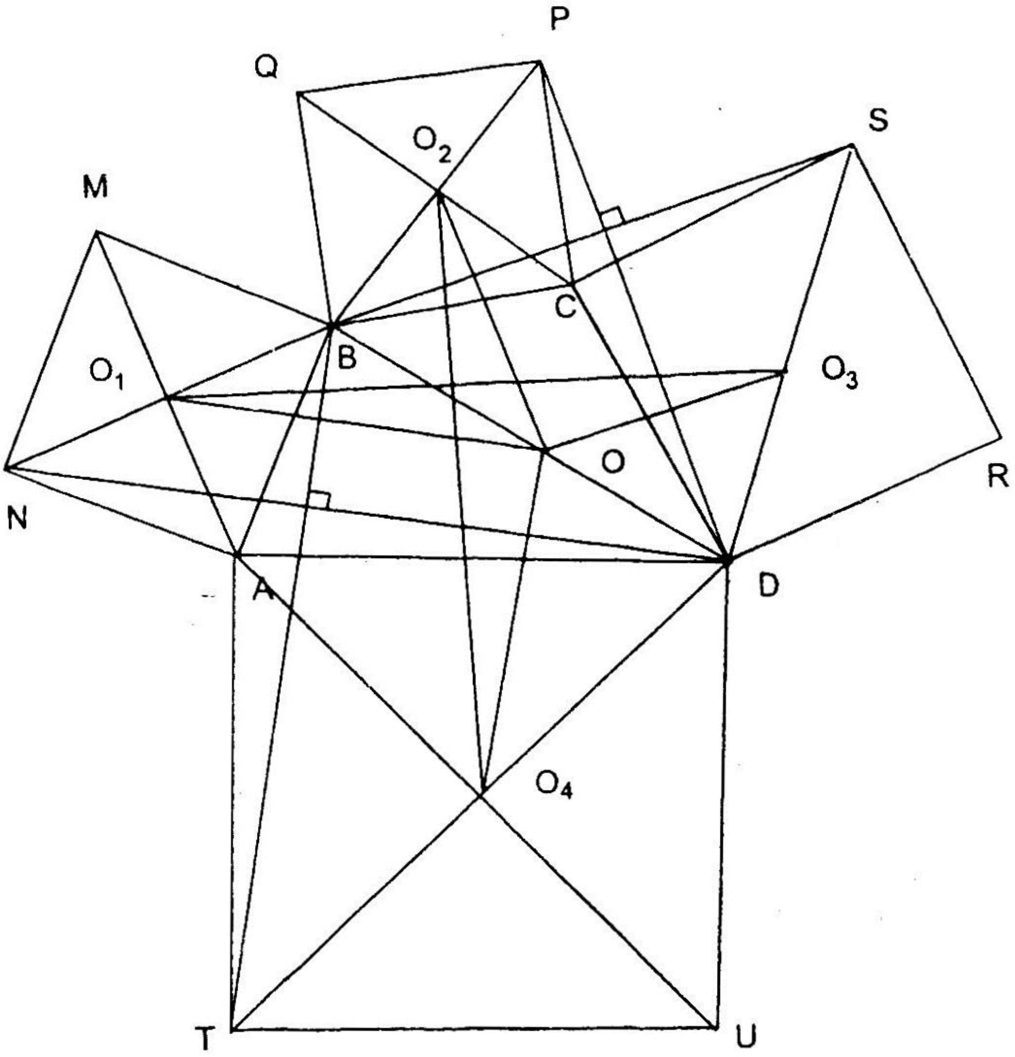
$$B \to P$$

$$S \to D$$

Vì thế: $$BS \xrightarrow{R^-(C,\, 90^0)} PD$$

Do vậy: $$BS \perp PD \text{ và } BS = PD \qquad (2)$$

Gọi O là trung điểm của đường chéo BD. Khi đó O_1O, OO_4; OO_3, OO_2 tương ứng là đường trung bình của các tam giác BND, BDT, BDS và BDP. Vì thế :



$$OO_1 \parallel ND \text{ và } O_1O = \frac{1}{2} ND \qquad (3)$$

$$OO_4 \parallel BT \text{ và } OO_4 = \frac{1}{2} BT \qquad (4)$$

$$OO_3 \parallel BS \text{ và } OO_3 = \frac{1}{2} BS \qquad (5)$$

$$OO_2 \parallel DP \text{ và } OO_2 = \frac{1}{2} PD \qquad (6)$$

Từ (1) (3) (4) suy ra $OO_1 = OO_4$ và $OO_1 \perp OO_4$ (7)

Từ (2) (5) (6) suy ra $OO_3 = OO_2$ và $OO_3 \perp OO_2$ (8)

Xét phép quay $R^+(O, 90^0)$. Từ (7) (8) suy ra:

$$O_1 \xrightarrow{R^+(O,\, 90^0)} O_4$$

$$O_3 \longrightarrow O_2$$

Vì vậy $$O_1O_3 \xrightarrow{R^+(O,\, 90^0)} O_4O_2 \qquad (9)$$

Theo định nghĩa của phép quay, thì từ (9) ta đi đến:

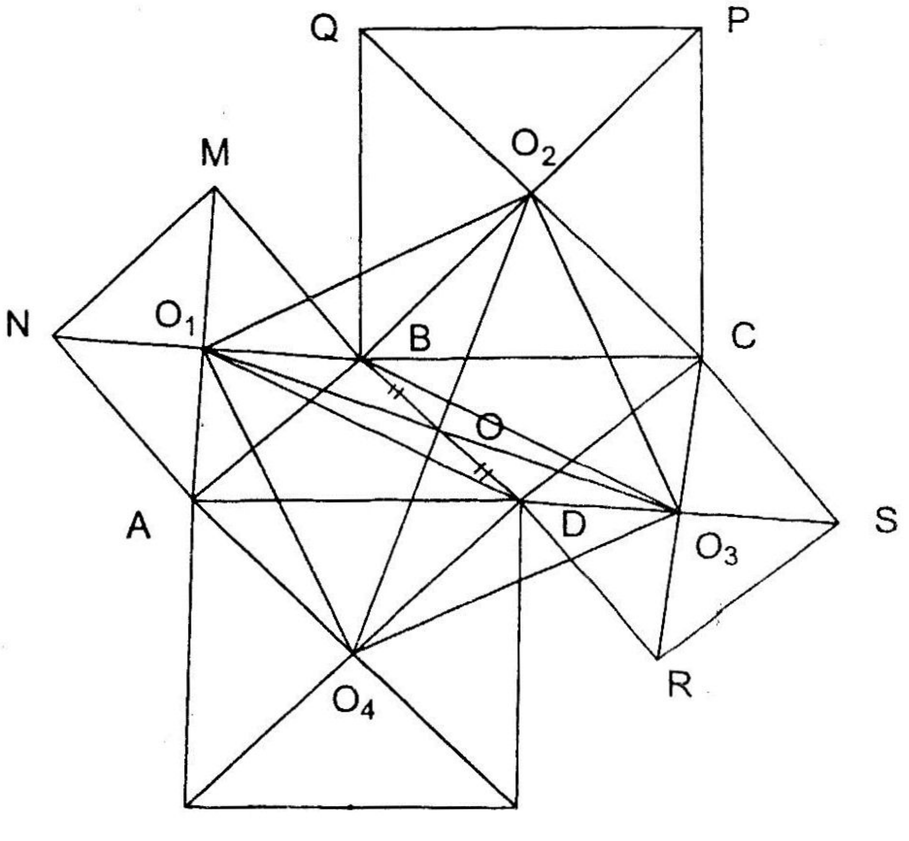
$O_1O_3 \perp O_2O_4$ và $O_1O_3 = O_2O_4$. Đó chính là đ.p.c.m..

Chú ý: Từ ví dụ 9 ta suy ngay ra kết quả sau đây:

Nếu ABCD là hình bình hành, thì với kí hiệu O_1, O_2, O_3, O_4 như trong ví dụ 9, ta sẽ có $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

Thật vậy, theo ví dụ trên ta có: $O_1O_3 \perp O_2O_4$ *và* $O_1O_3 = O_2O_4$

Do AB // CD, mà $\widehat{O_1BA} = \widehat{O_3DC} = 45^0 \Rightarrow O_1B \parallel O_3D$.



Lại có : $O_1B = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$, $O_3D = \dfrac{CD\sqrt{2}}{2}$; *mà* $AB = CD$

$\Rightarrow \quad O_1B = O_3D.$

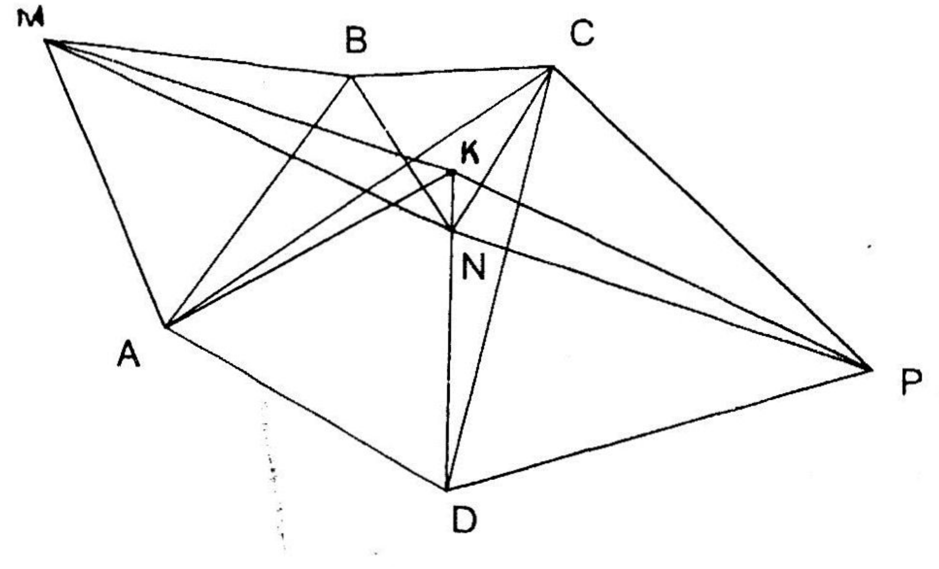
Vậy O_1BO_3D *là hình bình hành* $\Rightarrow O_1, O, O_3$ *thẳng hàng và* $OO_1 = OO_3$.

Lý luận tương tự có O_2, O, O_4 *thẳng hàng và* $OO_2 = OO_4$.

$\Rightarrow$ $O_1O_2O_3O_4$ *là hình bình hành. Hình bình hành này có hai đường chéo* O_1O_3 *và* O_2O_4 *bằng nhau và vuông góc với nhau, nên nó là hình vuông. Đó là đ.p.c.m..*

Ví dụ 11. Cho tứ giác lồi ABCD. Về phía ngoài tứ giác dựng hai tam giác đều ABM, CDP. Về phía trong tứ giác, dựng hai tam giác đều BCN và ADK. Chứng minh MNPK là hình bình hành.

BÀI GIẢI



Xét phép quay $R^+(B, 60^0)$. Trong phép quay này, thì:

$$M \to A$$

$$N \to C$$

Từ đó: $MN \xrightarrow{R^{+}(B,\ 60^{0})} AC \quad \Rightarrow MN = AC \qquad (1)$

Xét phép quay $R^{+}(D, 60^{0})$. Trong phép quay này, thì:

$$P \to C$$

$$K \to A$$

Từ đó: $PK \xrightarrow{R^{+}(D,\ 60^{0})} CA \quad \Rightarrow PK = CA \qquad (2)$

Từ (1) (2) suy ra $MN = PK$. Lý luận tương tự có $MK = PN$

$\Rightarrow$ MKNP là hình bình hành $\Rightarrow$ Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 12: Cho tam giác đều ABC. Tìm quĩ tích những điểm M nằm trong tam giác sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$

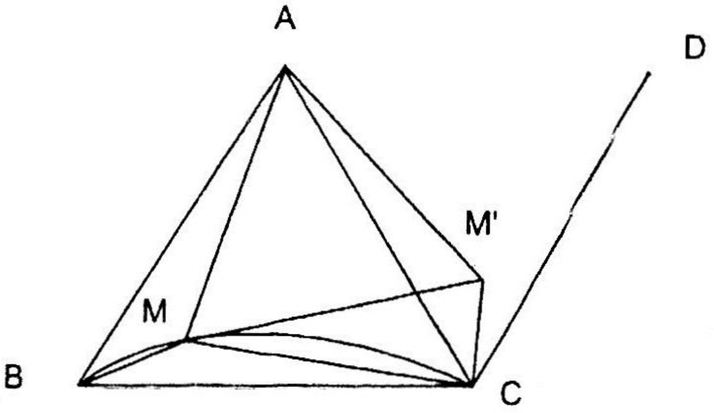
BÀI GIẢI

Xét phép quay $R^{+}(A,60^{0})$. Trong phép quay này

$$B \to C$$

$$M \to M'$$

$$C \to D$$



Theo định nghĩa của phép quay thì AMM' là tam giác đều, nên có:

$MA = MM' \qquad (1)$

Theo tính chất của phép quay suy ra:

$$BM \xrightarrow{R^{+}(A,\ 60^0)} CM' \qquad \Rightarrow MB = M'C \quad (2)$$

Từ giả thiết, và từ (1) (2) suy ra:

$$M'M^2 = M'C^2 + MC^2 \qquad (3)$$

Theo định lí Pitago đảo, từ (3) suy ra $\widehat{MCM'} = 90^0$

Theo tính chất của phép quay, suy ra:

$$\widehat{MBC} \xrightarrow{R^{+}(A,\ 60^0)} \widehat{M'CD} \qquad \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{M'CD}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MCB} = \widehat{M'CD} + \widehat{MCB} = \widehat{BCD} - \widehat{MCM'} = 120^0 - 90^0 = 30^0$$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = 180^0 - (\widehat{MBC} + \widehat{MCB}) = 150^0.$$

$\Rightarrow$ M nằm trong tam giác và luôn nhìn BC dưới góc 150^0, nên quỹ tích của M là phần cung chứa góc 150^0 dựng trên cạnh BC nằm trong tam giác ABC nói trên.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài trên hai cạnh của tam giác đó hai tam giác vuông ABD và BCE sao cho:

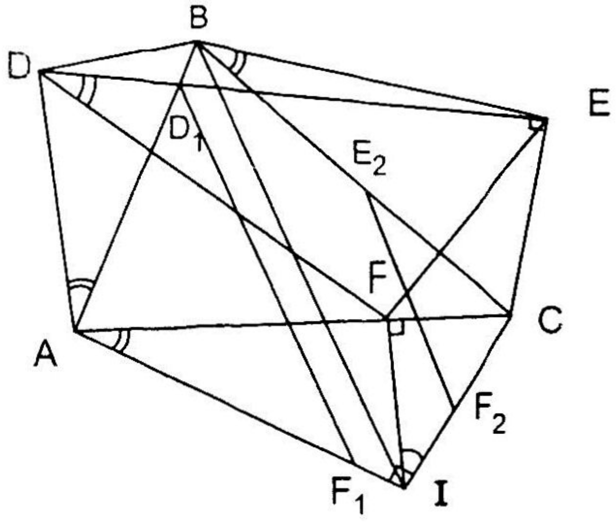
$\widehat{DAB} = \widehat{EBC} = 30^0$; $D = E = 90^0$. Lấy F trên AC sao cho :

$\dfrac{CF}{AF} = \dfrac{1}{3}$. Tìm ba góc của tam giác DEF.

BÀI GIẢI

Dựng thêm ra phía ngoài tam giác ABC, tam giác vuông ACI sao cho $I = 90^0$ và $\overline{IAC} = 30^0$. Ta có trong tam giác vuông AIC:

$CI = \dfrac{AC}{2}$ (vì $\widehat{IAC} = 30^0$), mà



$CF = \dfrac{AC}{4} \Rightarrow CF = \dfrac{CI}{2}$ mà

$\widehat{FCI} = 60^0 \Rightarrow$ IFC là tam giác vuông tại F và $\widehat{FIC} = 30^0$.

Xét phép quay $R^-(A, 30^0)$.

Trong phép quay này,

$$D \rightarrow D_1$$

$$F \rightarrow F_1$$

$$\Rightarrow \quad AD = AD_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{AD_1}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AF = AF_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{AF_1}{AI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD_1}{AB} = \frac{AF_1}{AI} \text{ (vì cùng bằng } \frac{\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D_1F_1 \,//\, BI \quad \text{và} \quad \frac{D_1F_1}{BI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

Xét phép quay $R^+(C, 60^0)$. Trong phép quay này,

$$E \rightarrow E_2$$

$$F \rightarrow F_2$$

Lý luận tương tự như trên có: $E_2F_2 \,//\, BI$ và $\dfrac{E_2F_2}{BI} = \dfrac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $D_1F_1 \,//\, E_2F_2$ và $D_1F_1 = \sqrt{3}\,E_2F_2$ (*)

Theo trên suy ra: $DF \xrightarrow{R\ (A,\ 30^0)} D_1F_1$ và

$EF \xrightarrow{R^+(C,\ 60^0)} E_2F_2$

Do DF tạo với D_1F_1 góc 30^0, EF tạo với E_2F_2 góc 60^0, mà hai phép quay này ngược chiều nhau, và do $D_1F_1 \,//\, D_2F_2 \Rightarrow DF \perp EF$.

Ta còn có: $D_1F_1 = DF$ và $E_2F_2 = EF$, vậy từ (*) suy ra :

$$DF = \sqrt{3}.EF$$

⇒ Tam giác DFE là tam giác vuông tại F, với FDE = 30^0.

Bài toán giải hoàn toàn.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác, các tam giác BCP, CAQ, ABR sao cho $\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^0$; $\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^0$ và $\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^0$. Chứng minh QRP là tam giác vuông cân.

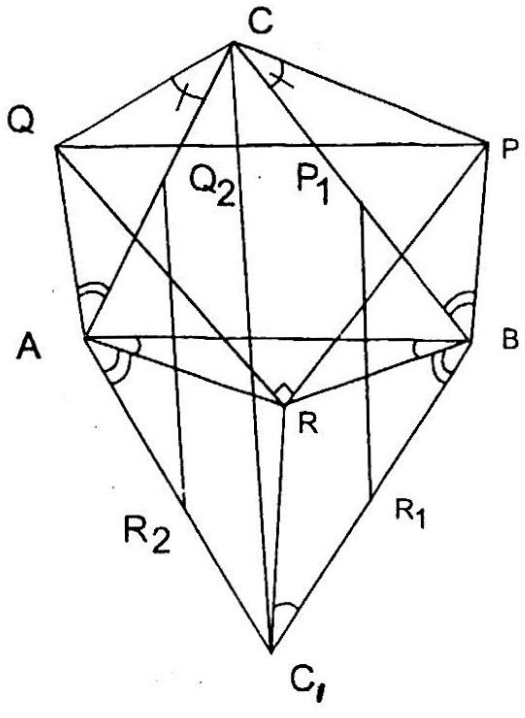
BÀI GIẢI

Dựng ra phía ngoài tam giác ABC, tam giác đều ABC_1 ⇒ $\widehat{C_1AR} = \widehat{C_1BR} = \widehat{PBC} = =\widehat{CAQ} = 45^0$ (1)

Xét phép quay $R^+(B,\ 45^0)$. Trong phép quay này thì:

$P \to P_1$

$R \to R_1$



(chú ý rằng do (1), nên $P_1 \in BC$ và $R_1 \in BC_1$).

$$\Rightarrow \quad BP = BP_1 \text{ và } BR = BR_1 \qquad (2)$$

Do ABR là tam giác cân, còn AC_1B là tam giác đều

$$\Rightarrow \quad \widehat{RC_1B} = 30^0 \quad \Rightarrow \quad \Delta BPC \sim \Delta BRC_1.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BR}{BP} = \frac{BC_1}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{BP}{BC} = \frac{BR}{BC_1}$$

Vậy từ (2) suy ra: $\dfrac{BR_1}{BC_1} = \dfrac{BP}{BC}$.

Tương tự có : $\dfrac{BR_1}{BC_1} = \dfrac{BP_1}{BC} = \dfrac{BP}{BC}$ (3)

Xét phép quay $R^-(A, 45^0)$. Trong phép quay này, ta có:

$$Q \rightarrow Q_2$$

$$R \rightarrow R_2$$

Lý luận như phần trên, ta đi đến:

$$\frac{AQ_2}{AC} = \frac{AR_2}{AC_1} = \frac{AQ}{AC} \qquad (4)$$

Lại do hai tam giác AQC ~ BPC $\Rightarrow \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{BP}{BC}$ (5)

Từ (3) (4) (5) suy ra:

$$\frac{AQ_2}{AC} = \frac{AR_2}{AC_1} = \frac{BR_1}{BC_1} = \frac{BP_1}{BC} \qquad (6)$$

Từ (6) theo định lí Talet suy ra:

$Q_2R_2 \,//\, P_1R_1$ (vì cùng $//\, CC_1$) (7)

Ngoài ra ta còn có: $\dfrac{R_2Q_2}{CC_1} = \dfrac{P_1R_1}{CC_1} \Rightarrow R_2Q_2 = R_1Q_1$ (8)

Theo trên $QR \xrightarrow{R^-(A,\ 45^0)} Q_2R_2$

và $PR \xrightarrow{R^+(B,\ 45^0)} P_1R_1$

nên theo tính chất của phép quay, ta có:

$QR = Q_2R_2$ và $PR = P_1R_1$ (9)

QR tạo với Q_2R_2 góc 45^0 và PR tạo với P_1R_1 góc 45^0 (10)

Từ (8) (9) $\Rightarrow$ $QR = RP$ (11)

Từ (7) (10) $\Rightarrow$ $QR \perp RP$ (12)

Từ (11) (12) suy ra QRP là tam giác vuông cân. Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều BCA_1, CAB_1 và ABC_1. Gọi O_1, O_2, O_3 tương ứng là tâm của ba tam giác đều ấy. Chứng minh rằng $O_1O_2O_3$ cũng là tam giác đều.

BÀI GIẢI

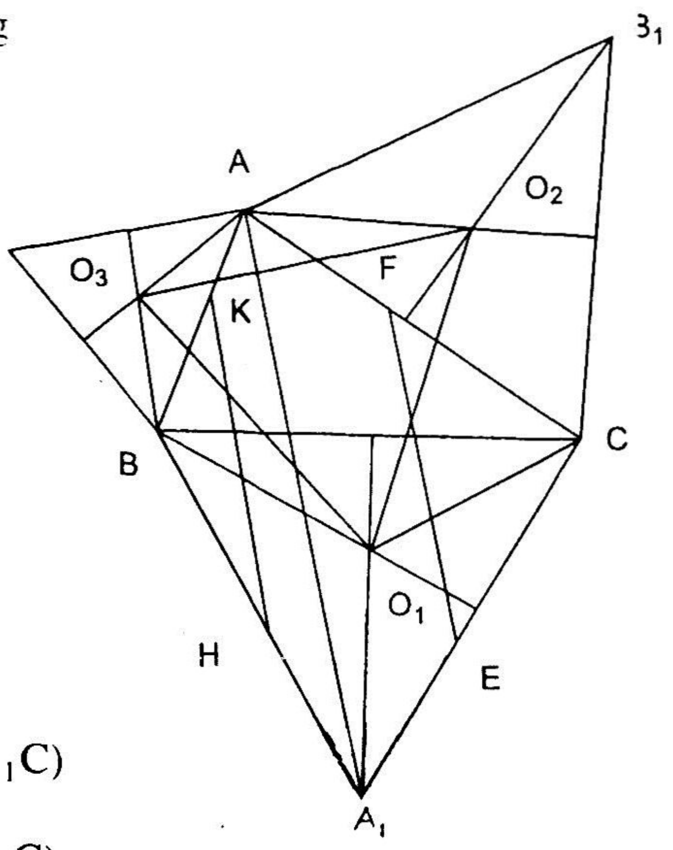
Ta có $\widehat{O_3BA} = \widehat{O_1BA_1} = 30^0$. Xét phép quay $R^-(B,\ 30^0)$

Trong phép quay này, ta có:

$O_3 \rightarrow K \quad (K \in BA)$

$O_1 \rightarrow H \quad (H \in BA_1)$

Lý luận tương tự, như trong hai ví dụ trên, ta có:



$KH // AA_1$ (1)

Ngoài ra do:

$$O_3O_1 \xrightarrow{R^-(B,\ 30^0)} KH$$

nên $O_3O_1 = KH$ và O_3O_1 tạo với KH góc 30^0 (2)

Xét phép quay $R^+(C, 30^0)$,

thì trong phép quay này:

$O_1 \rightarrow E$ $(E \in A_1C)$

$O_2 \rightarrow F$ $(F \in AC)$

Tương tự ta có: $FE // AA_1$ (3)

và : $O_2O_1 = FE$ và O_2O_1 tạo với FE góc 30^0 (4)

Từ (1) (2) (3) (4) suy ra $O_2O_3 = O_3O_1$ và $\widehat{O_3O_1O_2} = 60^0$

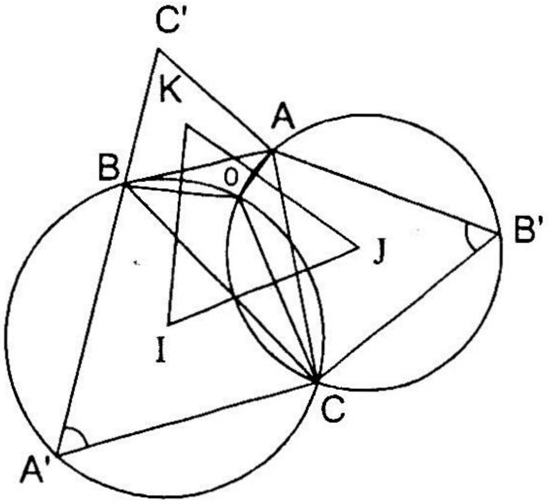
$\Rightarrow$ $O_1O_2O_3$ là tam giác đều $\Rightarrow$ **Đó là đ.p.c.m..**

Chú ý: *Bài toán trên là bài toán do hoàng đế Napoléon sáng tác. Napoléon Bonaparte (1769 - 1821), hoàng đế nổi tiếng của nước Pháp, là một người ham thích toán; ngay cả lúc cầm quân ở trận mạc, ông vẫn dành những phút giải trí qua việc giải các bài toán. Napoléon đã nêu ra một số bài toán hay, trong đó có bài toán nói trên.*

- Chúng tôi xin giới thiệu cách giải bài toán trên của chính Napoléon.

Dựng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều ACB', BCA' dựng trên hai cạnh AC, BC. Hai đường tròn này cắt nhau ở C và O (xem hình dưới đây). Hai tứ giác nội tiếp AB'CO và BA'CO có $\widehat{B'}=\widehat{A'}=60^0$, do đó $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 120^0$, suy ra $\widehat{AOB} = 120^0$, và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC' cũng qua O.

Như vậy, ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều ABC', BCA', CAB' cắt nhau tại O.



Ta có IJ ⊥ OC (vì IJ là đường nối tâm của hai đường tròn có dây chung là OC).

Tương tự JK ⊥ OA

$\Rightarrow$ $\widehat{IJK} = 60^0$

(do $\widehat{AOC} = 120^0$).

Tương tự ta có $\widehat{JKI} = \widehat{KIJ} = 60^0 \Rightarrow$ IJK là tam giác đều.

$\Rightarrow$ d.p.c.m..

Ví dụ 16. Trong mặt phẳng toạ độ cho điểm A (a, b) cố định (a > 0, b > 0). Đường thẳng Δ di động quay quanh A cắt trục hoành Ox tại M và trục tung Oy tại N. Đường thẳng qua M và // đường y = x cắt lại Oy tại M'; còn đường thẳng qua N và // đường y = -x cắt Ox tại N'. Chứng minh rằng M'N' luôn đi qua một điểm cố định.

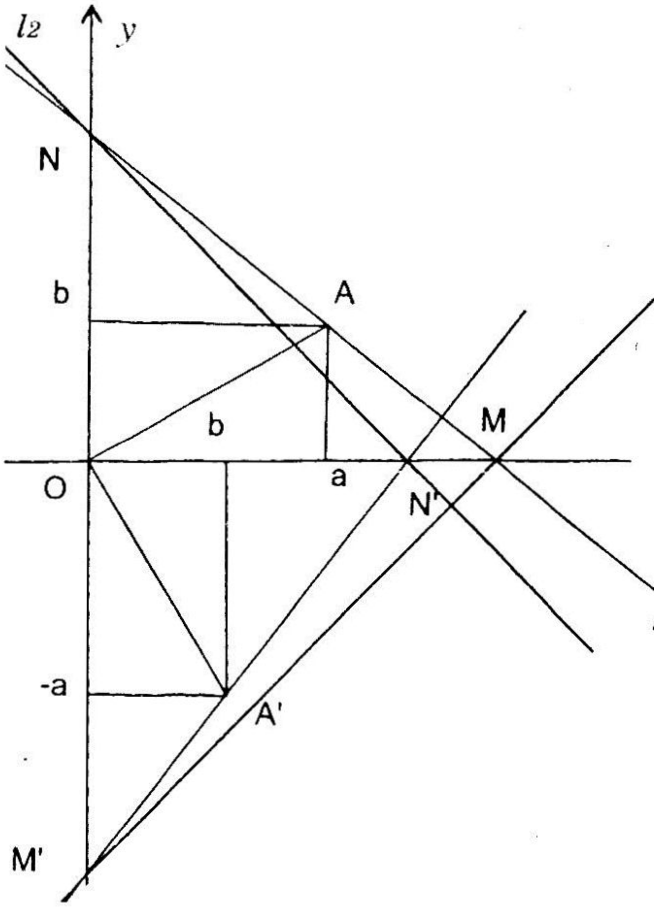
BÀI GIẢI

Gọi l_1 là đường thẳng qua M và // với y = x.

$l_1 \cap Oy = M'$, thì $OM = OM'$.

- Gọi l_2 là đường thẳng qua N và // với $y = -x$.

$l_2 \cap Ox = N'$, thì $ON' = ON$.



Xét phép quay

$$R^{-}(0,90^0).$$

Từ trên suy ra, trong phép quay này thì :

$M \to M'$

$N \to N'$

Vậy $MN \xrightarrow{R^{-}(O,90^0)} M'N'$

Vì $A \in MN$,

nên giả sử $A \xrightarrow{R^{-}(O,90^0)} A'$

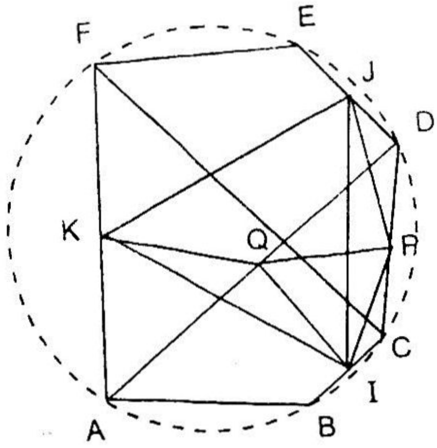
thì A' cố định và $A' \in M'N'$.

Như thế M'N' luôn đi qua điểm cố định A'. Dễ thấy tọa độ của A' là A'(b,-a).

Chú ý: *Cách giải này rõ ràng ngắn gọn hơn nhiều so với cách giải bằng đại số. (Các bạn có thể xem xét cách giải đại số của bài toán này trong cuốn "Toán nâng cao cho học sinh lớp 10", phần Đại số, của cùng tác giả. NXB Đại học Quốc gia, 1997).*

Ví dụ 17. Cho lục giác ABCDEF nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Giả sử AB = CD = EF = R. Gọi I, J, K là trung điểm của BC, DE, FA. Chứng minh rằng IJK là tam giác đều.

BÀI GIẢI



Do $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF} = 60^0$, nên ta có góc giữa các cặp véctơ sau đây bằng 60^0 và cùng hướng. $\overrightarrow{AC}$ với $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CE}$ với $\overrightarrow{DF}$ và $\overrightarrow{EA}$ với $\overrightarrow{FB}$.

Mặt khác cũng do $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF}$, nên ta có ABCD, CDEF, EFAB là các hình thang cân.

$$\Rightarrow \qquad AC = BD;\ CE = DF;\ EA = FB.$$

Gọi P, Q tương ứng là trung điểm của CD, DA. Khi đó theo tính chất đường trung bình trong tam giác, ta có:

$$PQ \,//\, AC \text{ và } PQ = \frac{1}{2}AC$$

$$IP \,//\, BD \text{ và } IP = \frac{1}{2}BD.$$

Do các nhận xét trên suy ra:

$PQ = IP$ và $\widehat{QPI} = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 60^0 \Rightarrow$ IPQ là tam giác đều. (1)

Ta cũng có: $PJ \,//\, CE$ và $PJ = \frac{1}{2}CE$

$$QK \,//\, FD \text{ và } QK = \frac{1}{2}FD.$$

$$\Rightarrow \qquad PJ = QK \text{ và } (\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{QK}) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF}) = 60^0 \qquad (2)$$

Xét phép quay $R^+(I, 60^0)$:

Từ (1) suy ra : $$P \xrightarrow{R^+(I,\ 60^0)} Q \qquad (3)$$

Do $(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{QK}) = 60^0$ và PJ = QK theo (2) nên từ (3) suy ra:

$$PJ \xrightarrow{R^+(I,\ 60^0)} QK$$

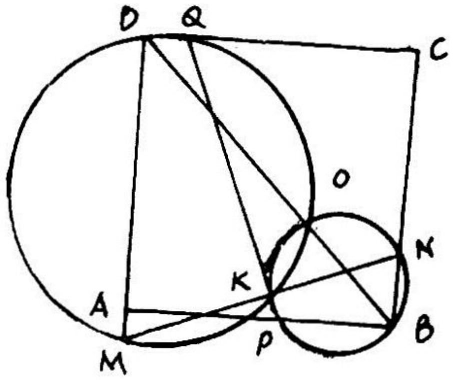
Điều đó có nghĩa là : $$J \xrightarrow{R^+(I,\ 60^0)} K$$

$\Rightarrow$ IJ = IK và $\widehat{KIJ} = 60^0$

$\Rightarrow$ KIJ là tam giác đều và đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 18. Cho hình vuông ABCD. K là một điểm nằm trong hình vuông. Qua K kẻ các đường thẳng cắt các cạnh AB, CD tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KPB và KQD nằm trên đường chéo BD.

BÀI GIẢI



Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQD (mà ta sẽ gọi là đường tròn Ω_1) với đường thẳng DA. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPB (mà ta sẽ gọi là đường tròn Ω_2) với đường thẳng BC.

Vì $\widehat{MDQ} = 90^0$ (do là góc D của hình vuông ABCD)

$\Rightarrow$ QM là đường kính của $(\Omega_1) \Rightarrow \widehat{QKM} = 90^0$.

Tương tự, ta có $\widehat{PKN} = 90^0$, vậy ba điểm M, K, N thẳng hàng. Và từ đó suy ra:

$$MN \perp PQ \qquad (1)$$

Bổ đề (Sẽ chứng minh ở cuối bài)

Ta có $MN = PQ$ (2)

Xét phép quay $R^+(O,90^0)$, sao cho trong phép quay này thì $Q \rightarrow M$ (có thể thấy ngay tâm quay O nằm trên trung trực của QM, và QOM là tam giác vuông vuông cân đỉnh O, và chiều quay từ Q $\rightarrow$ M ngược chiều kim đồng hồ. Tâm O dĩ nhiên duy nhất).

Từ (1) (2) suy ra $P \xrightarrow{R^+(O,90^0)} N$

Do $Q \xrightarrow{R^+(O,90^0)} M \Rightarrow \widehat{QOM} = 90^0$ (3)

Vì QM là đường kính của (Ω_1) nên từ (3) suy ra $O \in \Omega_1$.

Tương tự $O \in \Omega_2 \Rightarrow O \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Vậy O chính là giao điểm thứ hai của hai đường tròn Ω_1 và Ω_2.

Vì $Q \xrightarrow{R^+(O,90^0)} M$

Mà $QC \perp MD \Rightarrow$ tia QC $\xrightarrow{R^+(O,90^0)}$ tia MD

$\Rightarrow$ O cách đều MD và QC $\Rightarrow$ O nằm trên đường chéo BD

$\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Chứng minh bổ đề.

Thực chất của bổ đề là phải giải bài toán sau đây:

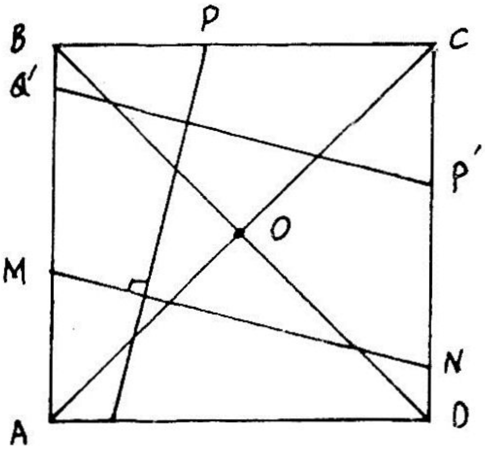
Qua điểm I nằm bên trong hình vuông ABCD kẻ hai đường thẳng vuông góc cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA tại các điểm M, P, N, Q tương ứng. Chứng minh rằng: $MN = PQ$.

Gọi O là tâm của hình vuông

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$ và $AC \perp BD$.

Xét phép quay $R^{\cdot}(O, 90^0)$.

Trong phép quay này, ta có:



$A \longrightarrow B$

$B \longrightarrow C$

$C \longrightarrow D$

$D \longrightarrow A$

Từ đó suy ra trong phép quay này, thì:

$AB \longrightarrow BC$; $BC \longrightarrow CD$;

$CD \longrightarrow DA$; $DA \longrightarrow AB$.

Vì $P \in BC$, nên giả sử $P \xrightarrow{R^{\cdot}(O,90^0)} P'$

thì do $BC \rightarrow CD \Rightarrow P' \in CD$

Tương tự giả sử: $Q \xrightarrow{R^{\cdot}(O,90^0)} Q'$

Thì $Q' \in DA \Rightarrow PQ \rightarrow P'Q'$. Vậy $PQ \perp P'Q'$ và $PQ = P'Q'$

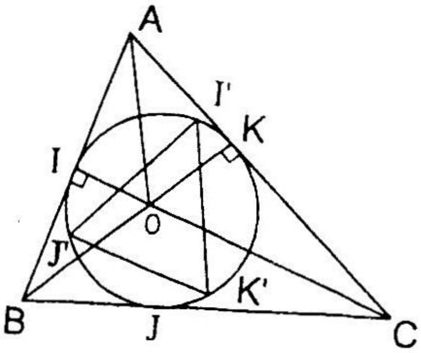
$\Rightarrow P'Q' \parallel MN$ (vì $MN \perp PQ$). Kết hợp với $P'N \parallel Q'M \Rightarrow Q'MNP'$ là hình bình hành $\Rightarrow P'Q' = MN \Rightarrow MN = PQ$. Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 19. Cho đường tròn tâm O nội tiếp trong tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin A.\overrightarrow{OA} + \sin B.\overrightarrow{OB} + \sin C.\overrightarrow{OC} = 0$.

BÀI GIẢI

Gọi I, J, K tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, BC, CA. Theo tính chất của hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm, ta có AO ⊥ IK. Tứ giác AIOK nội tiếp trong đường tròn đường kính OA. Đường tròn này cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác AIK, vì thế theo định lí hàm số sin trong tam giác này, ta có:

$$IK = OA.\sin A$$



Xét phép quay $R'(O,90^0)$.

Giả sử trong phép quay này, thì:

$$I \to I'$$

$$J \to J'$$

$$K \to K'$$

Theo tính chất của phép quay suy ra: $IK \xrightarrow{R'(O,90^0)} I'K'$

$\Rightarrow$ IK = I'K' và IK ⊥ I'K'. Do AO ⊥ IK $\Rightarrow$ IK // OA.

Ngoài ra do các lập luận trên suy ra:

$$\overrightarrow{K'I'} = \sin A.\overrightarrow{OA} \qquad (1)$$

Lý luận tương tự, có: $\overrightarrow{I'J'} = \sin B.\overrightarrow{OB}$ (2)

$$\overrightarrow{J'K'} = \sin C.\overrightarrow{OC} \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3), và do $\overrightarrow{K'I'} + \overrightarrow{I'J'} + \overrightarrow{J'K'} = 0$

suy ra: $\sin A.\ \overrightarrow{OA} + \sin B.\ \overrightarrow{OB} + \sin C.\ \overrightarrow{OC} = 0$

Đó chính là đ.p.c.m..

Chú ý: *Theo định lí hàm số sin suy ra :*

$$a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} = 0$$

Vậy O là tâm tỉ cự của ba đỉnh A, B, C theo bộ số (a, b, c). Vì thế đây là cách giải thứ hai cho ví dụ 7 - §1, chương I (trang 18).

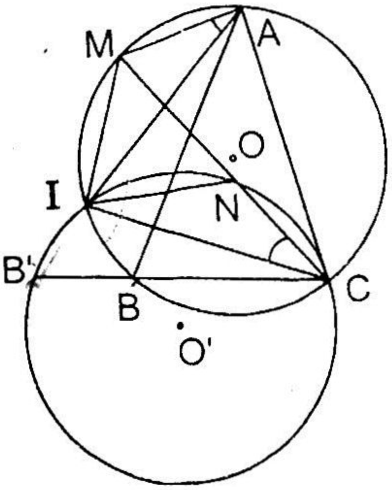
Ví dụ 20. Cho tam giác cân ABC (AB = AC và A = 2α) nội tiếp trong đường tròn tâm O. Một điểm M di động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. Trên tia CM ta lấy điểm N sao cho CN = AM. Tìm quĩ tích điểm N.

BÀI GIẢI

Gọi I là trung điểm của $\overset{\frown}{ABC}$ $\Rightarrow$ IA = IC. Xét hai tam giác AIM và CNI có AM = CN (g/t); IA = IC và $\widehat{MAI} = \widehat{NCI}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MI}$) $\Rightarrow$ Δ ANI = Δ CNI (c.g.c) $\Rightarrow$ IN = IM và $\widehat{MIA} = \widehat{NIC}$

$$\Rightarrow \widehat{MIN} = \widehat{AIC} \text{ mà } \widehat{AIC} = \widehat{ABC} = \frac{180^0 - 2\alpha}{2} = 90^0 - \alpha .$$

Từ đó suy ra trong các tam giác cân MIN và AIC (đỉnh I) ta có các góc ở đỉnh của chúng = $90^0 - \alpha$



Xét phép quay $R^-(I, 90^0-\alpha)$.

Trong phép quay này thì :

$M \to N$

$A \to C$

Vậy tập hợp điểm N là ảnh của tập hợp điểm M trong phép quay trên, tức là ảnh của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ trong phép quay đó.

Tóm lại, quỹ tích của N là ảnh của $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ trong phép quay $R^-(I, 90^0-\alpha)$.

Chú ý: *Ta có thể dựng quỹ tích trên như sau:*

- Dựng ảnh O' của O trong phép $R^-(I, 90^0-\alpha)$

- Vẽ đường tròn tâm O', bán kính O'I

- Đường tròn này cắt tia CB tại B'

Khi đó quỹ tích của N chính là cung $\overset{\frown}{CIB'}$ (cung $\overset{\frown}{CB'}$ nhỏ) của đường tròn tâm O', bán kính O'I.

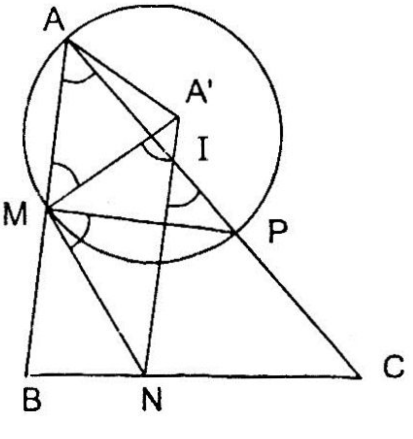
Ví dụ 21. Cho tam giác ABC, có A = α, và một điểm M nằm trên cạnh AB. Dựng trên các đường thẳng BC, CA các điểm N, P tương ứng sao cho thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

MP = MN và đường tròn đi qua A, M, P tiếp xúc với MN.

BÀI GIẢI

Giả sử đã dựng được hai điểm N ∈ BC, P ∈ AC thoả mãn các điều kiện đầu bài đòi hỏi. Khi đó ta có (theo tính chất của đường tròn):

$$\widehat{NMP} = \widehat{MAP} = \alpha$$



Xét phép quay $R^{-}(M, \alpha)$. Trong phép quay này (do MP = MN và NMP = α).

$$P \longrightarrow N \text{ ; Giả sử:}$$

$$A \xrightarrow{R^{-}(M,\,\alpha)} A'$$

$$\Rightarrow \quad PA \longrightarrow NA'.$$

Giả sử $A'N \cap AC = I$

Theo tính chất của phép quay, ta có $\widehat{NIC} = \widehat{(PA, NA')} = \alpha$

$$\Rightarrow \quad \widehat{NIC} = \widehat{BAC} \Rightarrow IN \parallel AB$$

Từ đó suy ra cách dựng như sau:

- Thực hiện phép quay $R^{-}(M, \alpha)$ và giả sử $A \xrightarrow{R^{-}(M, \alpha)} A'$

như vậy A' hoàn toàn xác định.

- Kẻ A'N // AB (cắt BC tại N)
- Dựng tia MP cắt AC tại P sao cho $\widehat{NMP} = \alpha$

Chứng minh:

Vì A'N // AB $\Rightarrow \widehat{AMA'} = \widehat{MA'N} = \alpha$ (*)

$\Rightarrow$ $\widehat{PMN} = \widehat{MAP} = \alpha \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP tiếp xúc với MN.

Do $A \xrightarrow{R^{-}(M, \alpha)} A'$ mà $\widehat{MAC} = \widehat{MA'N} = \alpha$

$$\Rightarrow \quad \widehat{MAC} \xrightarrow{R^{-}(M, \alpha)} \widehat{MA'N}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tia } AC \xrightarrow{R^{-}(M, \alpha)} \text{tia } A'N \qquad (**)$$

Do $\widehat{NMP} = \alpha$, vậy tia MP $\xrightarrow{R^{-}(M, \alpha)}$ tia MN (***)

Vì $P = AC \cap MP$ mà $N = A'N \cap MN$ nên từ (**) và (***) suy ra:

$$P \xrightarrow{R^{-}(M, \alpha)} N, \quad \text{tức là } MP = MN$$

Như vậy hai điểm M, N thoả mãn mọi yêu cầu của đề bài nên chính là các điểm cần dựng.

Biện luận: Do A' là xác định ⇒ N, P cũng vậy. Vậy bài toán luôn dựng được và có 1 nghiệm hình duy nhất.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC, và tam giác MNP với các điểm M, N, P nằm trên các đường thẳng AB, BC, CA tương ứng. Dựng ba điểm M_1, N_1, P_1 trên các đường thẳng tương ứng AB, BC, CA sao cho $\Delta M_1N_1P_1 = \Delta MNP$.

BÀI GIẢI

Giả sử đã dựng được tam giác $M_1N_1P_1$ thoả mãn yêu cầu đề ra. Xét phép quay R(I, α) sao cho:

$$M_1 \xrightarrow{R(I,\,\alpha)} M$$

$$P_1 \longrightarrow P$$

Do $MM_1 \cap PP_1 = A$, nên tâm quay I nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMP (sẽ chứng minh nhận xét này ở cuối bài).

Do $\Delta M_1N_1P_1 = \Delta MNP$, vậy dĩ nhiên : $N_1 \xrightarrow{R(I,\,\alpha)} N$

Do $NN_1 \cap PP_1 = C$, nên tâm quay I nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác CNP ⇒ I là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác AMP và CNP. Từ đó suy ra cách dựng như sau:

Cách dựng:

- Dựng giao điểm thứ hai I của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác AMP và CNP.

- Lấy M_1, N_1, P_1 trên AB, BC, CA tương ứng sao cho $IM_1 = IM$, $IN_1 = IN$, $IP_1 = IP$. Khi đó M_1, N_1, P_1 là các điểm cần dựng.

Chứng minh: Trong tứ giác nội tiếp AMIP, có $\widehat{IMM_1} = \widehat{IPP_1}$ (vì cùng bù $\widehat{API}$). Vì IMM_1 và IPP_1 là các tam giác cân đỉnh I $\Rightarrow$ $\widehat{MIM_1}$ và $\widehat{PIP_1}$ là các góc bằng nhau (và cùng hướng). Đặt $\alpha = \widehat{MIM_1}$.

Xét phép quay $R^+(I, \alpha)$, ta có: $M_1 \xrightarrow{R^+(I,\,\alpha)} M$

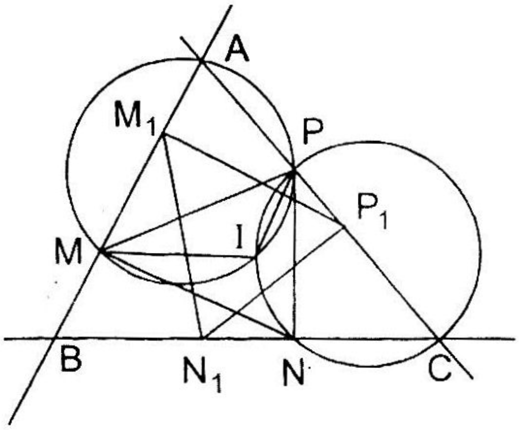
$P_1 \longrightarrow P$

Vì $\widehat{INN_1} = \widehat{IPP_1} = \alpha \Rightarrow$ $N_1 \xrightarrow{R^+(I,\,\alpha)} N$

Vậy $\Delta M_1N_1P_1 \xrightarrow{R^+(I,\,\alpha)} \Delta MNP$

$\Rightarrow \Delta\, M_1N_1P_1 = \Delta\, MNP$. Vậy M_1, N_1, P_1 quả là ba điểm cần tìm.

Biện luận: Vì I luôn dựng được và duy nhất $\Rightarrow$ Bài toán luôn có một nghiệm hình duy nhất.



Chú ý: Chứng minh nhận xét nói trên, chính là ta sẽ giải bài toán sau:

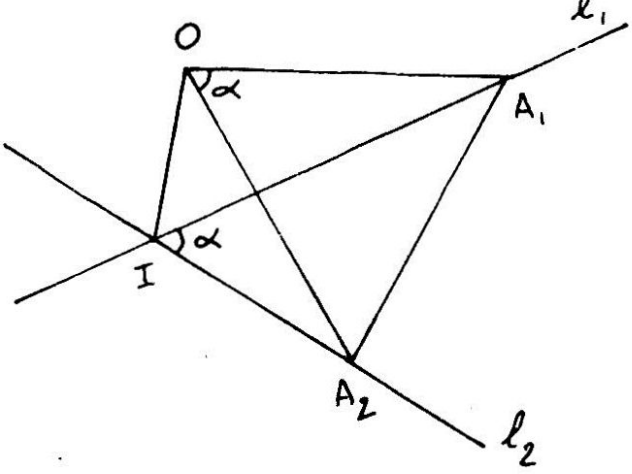
Phép quay tâm O biến đường thẳng l_1 thành đường thẳng l_2, và biến điểm A_1 trên l_1 thành A_2 trên l_2.

Chứng minh rằng giao điểm của các đường thẳng l_1 và l_2 nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta\, A_1OA_2$.

LỜI GIẢI

Giả sử, $$A_1 \xrightarrow{R(O,\,\alpha)} A_2$$

$$l_1 \longrightarrow l_2$$



Gọi I = $l_1 \cap l_2$. Theo tính chất của phép quay ta có $\widehat{A_1IA_2} = \alpha$ (và đó chính là góc hợp bởi l_1 và l_2).

Mặt khác theo định nghĩa của phép quay, ta có: $\widehat{A_2OA_1} = \alpha$

$\Rightarrow$ $\widehat{A_2OA_1} = \widehat{A_1IA_2} \Rightarrow A_2IOA_1$ là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Chương V

PHÉP TỊNH TIẾN

§ 1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho trước một véctơ $\vec{a} \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$, gọi là phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{a}$, và sẽ kí hiệu là phép biến hình T_a.

Như vậy $\quad M \xrightarrow{T_{\vec{a}}} M' \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{a}$

Rõ ràng ta có các tính chất sau đây đối với phép tịnh tiến.

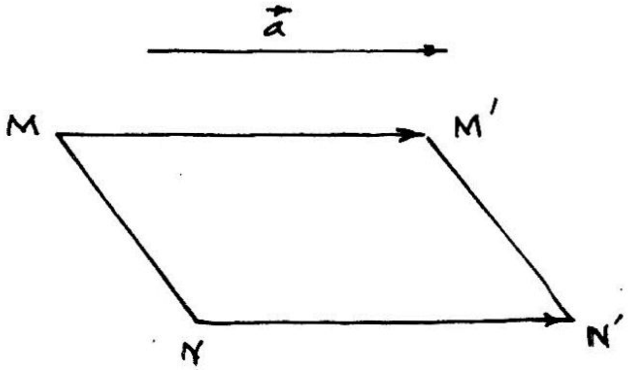
1. Nếu $\quad M \xrightarrow{T_{\vec{a}}} M'$

$N \longrightarrow N'$

thì $\quad MN \xrightarrow{T_{\vec{a}}} M'N'$, tức là sẽ có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

2. Phép tịnh tiến biến ba điểm A, B, C thẳng hàng thành A', B', C' thẳng hàng. Nói riêng ta có:

- Phép tịnh tiến biến: đường thẳng thành đường thẳng cùng phương, tia thành tia cùng hướng, đoạn thẳng, đa giác, đường tròn, góc, miền góc thành hình bằng nó.

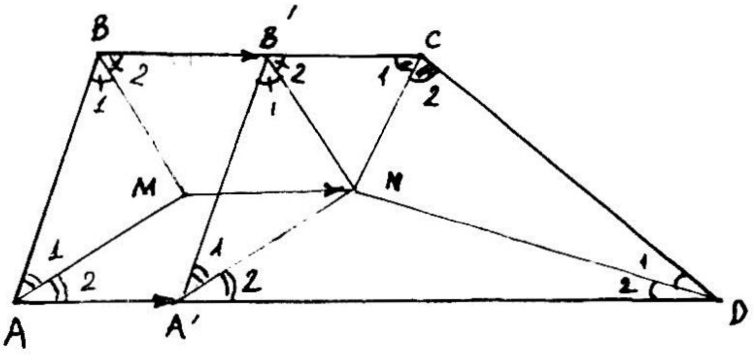


§ 2. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Trong hình thang ABCD (BC // AD), tổng hai đáy lớn hơn tổng hai cạnh bên. Gọi M là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc A và B; gọi N là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc C và D. Chứng minh rằng:

$$2MN = BC + AD - (AB + CD).$$

BÀI GIẢI



Do M là giao điểm của hai đường phân giác các góc A,B ⇒ M cách đều hai đáy BC và AD. Tương tự N cũng cách đều hai đáy BC và AD ⇒ MN // AD

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{MN}}$. Trong phép tịnh tiến này, ta có:

$$M \to N$$

$$B \to B' \quad (B' \in BC)$$

$$A \to A' \quad (A' \in AD)$$

Vì vậy $\widehat{B_1} \to \widehat{B'_1}$; $\widehat{B_2} \to \widehat{B'_2}$

$\widehat{A_1} \to \widehat{A'_1}$; $\widehat{A_2} \to \widehat{A'_2}$

⇒ $\widehat{B'_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{A'_1} = \widehat{A'_2}$ (do $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$)

⇒ N là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác A'B'C D

⇒ $A'B' + CD = B'C + A'D$ (1)

Theo trên suy ra: $BB' = AA' = MN$.

Rõ ràng do $BA \xrightarrow{T_{MN}} B'A' \Rightarrow BA = B'A'$.

Vì thế từ (1) suy ra:

$$AB + CD = (BC - MN) + (AD - MN), \text{ hay}$$

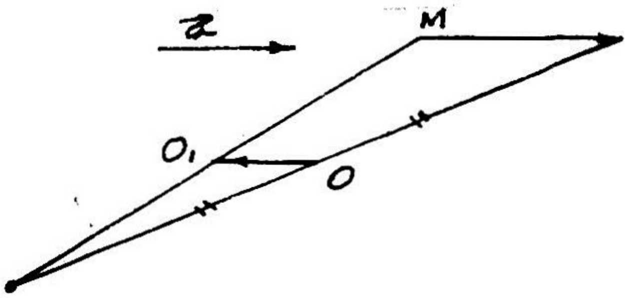
$$2MN = BC + AD - (AB + CD).$$

Đó chính là đ.p.c.m..

Ví dụ 2. Phép quay một góc 180^0 quanh tâm O, gọi là phép đối xứng qua tâm O và kí hiệu là S_O, tức là $S_O = R(O, 180^0)$. Cho a là một véctơ ≠ 0, và O là một điểm cho trước. Chứng minh rằng các phép biến hình S_OT_a hoặc T_aS_O đều là các phép đối xứng tâm.

BÀI GIẢI

1. Xét phép $S_OT_{\vec{a}}$



$T_{\vec{a}}(M) = M_1$

Xét điểm M tuỳ ý. Giả sử:

$$M \xrightarrow{T_{\vec{a}}} M_1 \qquad (1)$$

$$M_1 \xrightarrow{S_O} M_2 \qquad (2)$$

$S_OT_{\vec{a}}(M) = M_2$

Từ (1) suy ra $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$ (*)

Từ (2) suy ra $\overrightarrow{OM_2} = -\overrightarrow{OM_1}$ (**)

Gọi O_1 là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{OO_1} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ (3)

Từ (3) suy ra O_1 xác định duy nhất. Hiển nhiên ta có:

$$\overrightarrow{O_1M_2} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM_2}$$

Theo (3) và (**) suy ra: $\overrightarrow{O_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{a} - \overrightarrow{OM_1}$ (4)

Ta lại có: $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} =$

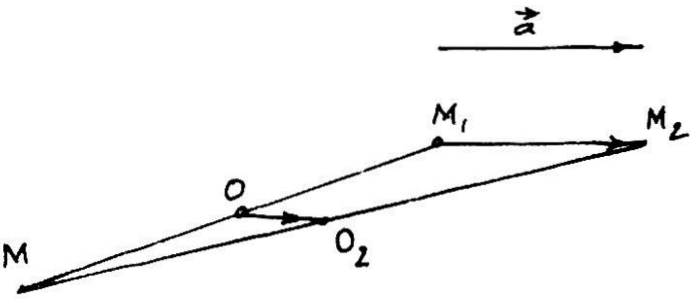
$$= +\frac{1}{2}\vec{a} + \overrightarrow{OM_1} - \vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \overrightarrow{OM_1} \qquad (5)$$

Từ (4) (5) suy ra: $\overrightarrow{O_1M_2} = -\overrightarrow{O_1M}$

Theo định nghĩa suy ra: $M \xrightarrow{S_{O_1}} M_2$

Như vậy do M tuỳ ý, ra có $S_OT_{\vec{a}} = S_{O_1}$

2. Xét phép $T_{\vec{a}}S_O$.



Lấy điểm M tuỳ ý, ta có:

$$M \xrightarrow{S_O} M_1 \qquad (6)$$

$$M_1 \xrightarrow{T_{\vec{a}}} M_2 \qquad (7)$$

Từ (6) suy ra $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM}$ (***)

Từ (7) suy ra $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{a}$ (****)

Gọi O_2 là điểm xác định bởi hệ thức : $\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{2}\vec{a}$ (8)

Từ (8) suy ra O_2 xác định duy nhất. Rõ ràng:

$$\overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$

Từ (***) (****) và (8) suy ra :

$$\overrightarrow{O_2M_2} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \overrightarrow{OM_1} + \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \overrightarrow{OM_1} \qquad (9)$$

Lại có $\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OM}$

Từ (***) và (8) suy ra: $\overrightarrow{O_2M} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \overrightarrow{OM_1}$ (10)

Từ (9) (10) dẫn đến: $\overrightarrow{O_2M_2} = -\overrightarrow{O_2M}$

$$M \xrightarrow{S_{O_2}} M_2$$

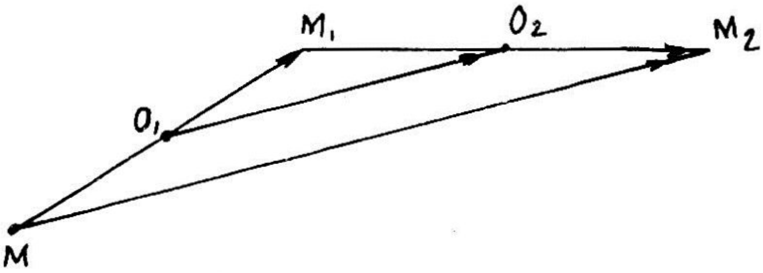
Như vậy do M tuỳ ý, ta có: $T_{\vec{a}}S_O = S_{O_2}$

Chú ý: *Từ ví dụ 2 ta rút ra kết luận sau: "Tích của phép tịnh tiến với phép đối xứng tâm hoặc ngược lại sẽ là một phép đối xứng tâm".*

Ví dụ 3. Cho O_1, O_2, ($O_1 \neq O_2$) là hai điểm cố định cho trước. Chứng minh rằng phép biến hình $S_{O_2}S_{O_1}$ là một phép tịnh tiến.

BÀI GIẢI

Lấy điểm M tuỳ ý, ta có:



$$M \xrightarrow{S_{O_1}} M_1 \quad (1)$$

$$M_1 \xrightarrow{S_{O_2}} M_2 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra: $\overrightarrow{O_1M_1} = -\overrightarrow{O_1M}$ (3)

Từ (2) suy ra : $\overrightarrow{O_2M_2} = -\overrightarrow{O_2M_1}$ (4)

Xét véctơ $\vec{a} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, như vậy $\vec{a}$ là véctơ xác định.

Ta có $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

$= \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1O_2} + \overrightarrow{O_2M_2}$ (5)

Từ (3) suy ra: $\overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{O_1M_1}$ và từ (4) suy ra: $\overrightarrow{M_1O_2} = \overrightarrow{O_2M_2}$

Thay vào (5) có: $\overrightarrow{MM_2} = 2(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1O_2}) = 2\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{a}$

Như vậy $$M \xrightarrow{T_{\vec{a}}} M_2$$

Do M là tuỳ ý, ta đi đến kết luận sau:

$$S_{O_2}S_{O_1} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}} \Rightarrow \text{đ.p.c.m..}$$

Chú ý: *Từ ví dụ 3 suy ra kết luận sau: "Tích của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến".*

Ví dụ 4. Cho ba điểm O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng. Chứng minh rằng phép biến hình sau:

$$S_{O_3}S_{O_2}S_{O_1}S_{O_3}S_{O_2}S_{O_1}$$

là phép biến hình đồng nhất I. (Chú ý rằng phép biến hình đồng nhất I là phép biến hình biến mỗi điểm thành chính nó, tức là ∀ điểm M, ta có : $M \xrightarrow{I} M$)

BÀI GIẢI

Theo ví dụ 3, ta có :

$$S_{O_3}S_{O_2}S_{O_1}S_{O_3}S_{O_2}S_{O_1} = T_{2\overrightarrow{O_2O_3}} \cdot T_{2\overrightarrow{O_3O_1}} \cdot T_{2\overrightarrow{O_1O_2}} \qquad (1)$$

Dễ dàng chứng minh công thức sau đây, đối với tích hai phép tịnh tiến:

$$T_{\vec{b}} \cdot T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}} \qquad (2)$$

Áp dụng công thức (2), nên từ (1) suy ra:

$$VF\,(1) = T_{2(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_3O_1}+\overrightarrow{O_2O_3})} = T_{\vec{O}} \qquad (3)$$

(Do $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_1} = \overrightarrow{O_1O_1} = \vec{O}$)

Từ (3) và để ý rằng phép tịnh tiến theo véc tơ không, chính là phép biến đổi đồng nhất, tức là $VF\,(1) \equiv I$, hay:

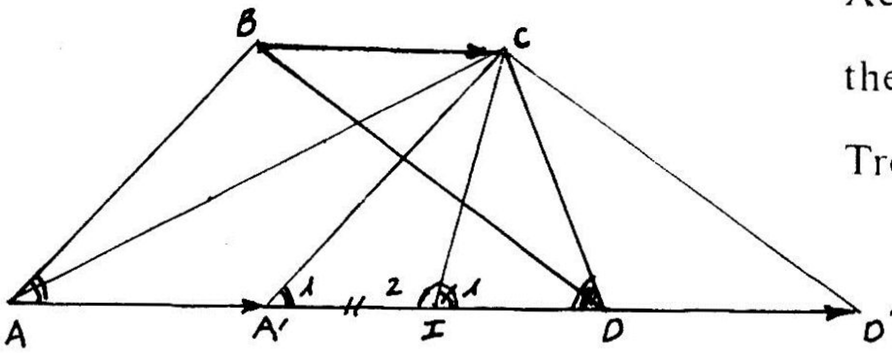
$$S_{O_3}S_{O_2}S_{O_1}S_{O_3}S_{O_2}S_{O_1} \equiv I$$

Đó chính là đ.p.c.m..

Ví dụ 5. ⓧ Cho hình thang ABCD có $A < D$.

Chứng minh: $BD < CA$

BÀI GIẢI



Xét phép tịnh tiến theo BC : $T_{\overrightarrow{BC}}$

Trong phép này ta có:

$$A \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BC}}} A'$$

$$D \longrightarrow D'$$

Khi đó ta có ngay BCA'A và BCD'D là các hình bình hành, và AA' = DD' (vì cùng = BC).

Do $\widehat{A} = \widehat{A'}_1$, vậy theo giả thiết suy ra : $\widehat{A'}_1 < \widehat{D}$. (1)

Từ (1) nên trong Δ CA'D suy ra : $CA' > CD$ (2)

Gọi I là trung điểm của A'D (khi đó dễ thấy I cũng là trung điểm của AD')

Bằng cách xét hai tam giác CIA' và CID, có CI chung, IA' = ID và (2)

$\Rightarrow$ $\widehat{I_2} > \widehat{I_1}$. Vì thế từ hai tam giác CID' và CIA

suy ra: $CA > CD'$ (3)

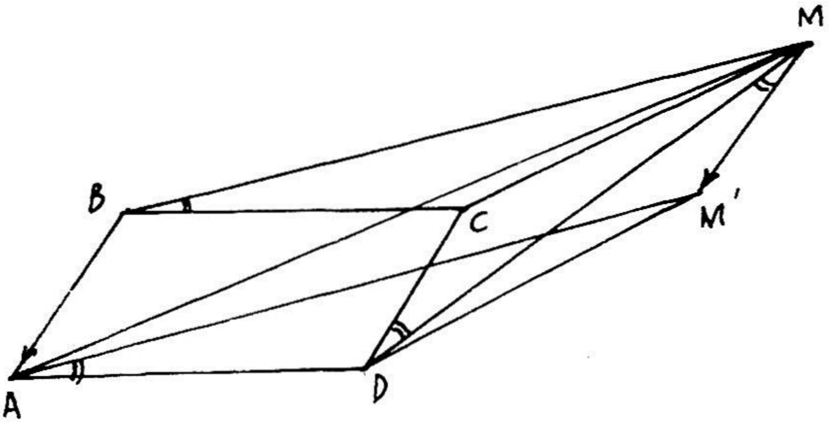
Do $CD' = BD$ (4)

Từ (3) (4) suy ra: $BD < CA \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 6. Cho hình bình hành ABCD và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD.

Giả sử $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$. Chứng minh rằng $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$.

BÀI GIẢI



Xét phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{BA}$. Giả sử trong phép tịnh tiến ấy thì $M \to M'$.

Do ABCD là bình hành nên ta có:

$$B \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} A$$
$$C \longrightarrow D$$

$$\Rightarrow \quad MC \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} M'D \quad \Rightarrow MC \,//\, M'D \text{ và } MC = M'D$$

nên DCMM' là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{DMM'}$ (1)

Theo trên suy ra $\widehat{MBC} \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} \widehat{M'AD}$

Vậy $\widehat{MBC} = \widehat{M'AD}$ (2)

Từ giả thiết $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$, và từ (1) (2) suy ra:

$$\widehat{DMM'} = \widehat{M'AD}$$

$\Rightarrow$ AMM'D là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AM'D}$ (3)

Mặt khác theo trên suy ra (theo tính chất của phép tịnh tiến)

$$\widehat{BMC} \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} \widehat{AM'D}$$

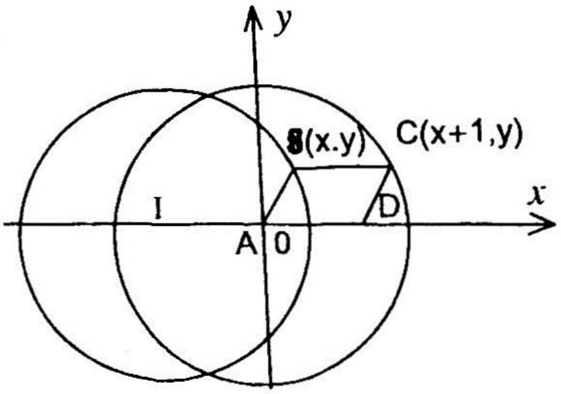
$\Rightarrow \quad \widehat{BMC} = \widehat{AM'D}$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$ $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

***Chú ý** : Trong chương 2, §2, ví dụ 36 (trang 154) ta đã giải bài tập này bằng phương pháp lượng giác (với kiến thức lớp 10).*

Ví dụ 7. Trên đoạn AD cố định dựng hình bình hành ABCD sao cho $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BD}{AB}$. Tìm quỹ tích đỉnh C của hình bình hành.

BÀI GIẢI



Lấy A làm gốc toạ độ, và dựng hệ trục tọa độ sao cho trục hoành là đường thẳng nối A, D và có chiều dương hướng từ A đến D (xem hình vẽ).

Trong hệ trục ấy giả sử điểm cố định cho trước có tọa độ D (1,0).

Giả sử tọa độ của B là B (x,y), thì tọa độ của C là C (x – 1, y). Từ giả thiết, ta có:

$$AC \,.\, AB = AD \,.\, BD$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \,.\, \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x+1)^2 + x^2y^2 + y^2(x+1)^2 + y^4 = (x-1)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (x^2 + y^2) + y^2\ (x^2 + y^2) = (x-1)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2x + 1) = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2x) = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 2x) - x^2 - y^2 - 2x = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 2x - 1) = 0$$

Và do $\quad x^2 + y^2 + 1 > 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2 \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra quỹ tích của B là đường tròn tâm tại điểm I (-1,0), bán kính $\sqrt{2}$, tức là đường tròn tâm I (I là điểm đối xứng của D qua A), bán kính là AD$\sqrt{2}$

Rõ ràng : $T_{\overrightarrow{AD}}$

$B \to C$

Vậy quỹ tích của C là tịnh tiến của quỹ tích trên theo $\overrightarrow{AD}$, tức là quỹ tích của C là đường tròn tâm A, bán kính AD $\sqrt{2}$.

Ví dụ 8. Một hình phẳng M được gọi là có tâm đối xứng , nếu như tồn tại phần tử $x_0 \in M$ sao cho $\forall x \in M$ thì điểm x' đối xứng của x qua x_0 cũng thuộc M. (Lúc ấy x_0 gọi là tâm đối xứng của M). Chứng minh rằng một hình phẳng giới nội (1), đóng cùng lắm là có một tâm đối xứng.

BÀI GIẢI

Giả thiết phản chứng có một hình phẳng hữu hạn M có quá một tâm đối xứng. Khi đó giả sử A_1, A_2 là hai trong số các tâm đối xứng của nó. Dĩ nhiên $A_1 \neq A_2$

Dựng hệ trục tọa độ Oxy tùy ý, trong đó trục hoành Ox// A_1A_2 và chiều dương của trục hoành hướng theo chiều từ A_1 đến A_2

Lấy x bất kỳ $\in$ M. Gọi x' là ảnh của x trong phép S_{A_1}, tức $x' = S_{A_1}(x)$. Do A_1 là tâm đối xứng của M, nên $x' \in M$.

Gọi x" là ảnh của x' trong phép S_{A_2} tức :

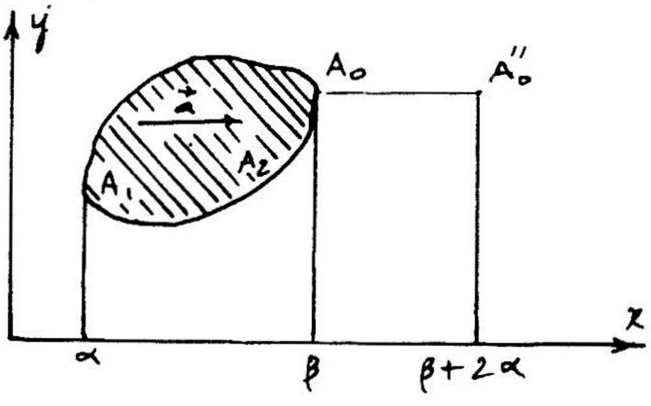
$$x'' = S_{A_2}(x') = S_{A_2}S_{A_1}(x)$$

---

(1) *Hình phẳng được gọi là giới nội, nếu như tồn tại một số R > 0 hữu hạn, sao cho có thể đặt hình phẳng ấy vào trong một hình tròn bán kính R*

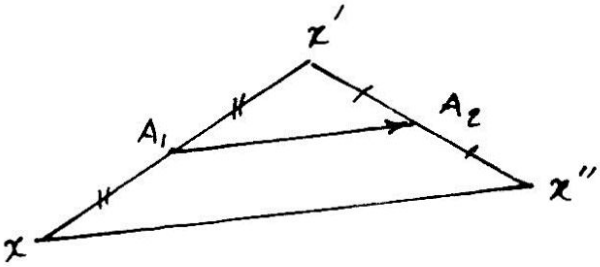
Vì x' ∈ M, mà A_2 cũng là tâm đối xứng của M, nên x'' ∈ M. Vì tích của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến (xem ví dụ 3), cụ thể ta có :

$$S_{A_2}S_{A_1} = T_{2\overrightarrow{A_1A_2}}$$



Đem chiếu hình phẳng M lên trục hoành. Vì M là giới nội đóng, nên tồn tại số β sao cho nếu gọi x là hoành độ của một điểm A bất kỳ của M thì x ≤ β, và tồn tại điểm A_o (x_o,y_o) ∈M sao cho $x_o = \beta$.

Theo lí luận trên thì điểm $A''_o = S_{A_2}S_{A_1}(A_o)$ cũng thuộc M. Giả sử $A_1A_2 = a > 0$.



Khi đó do $S_{A_2}S_{A_1}(A_0) = T_{2A_1A_2}(A_0)$,

ta có hoành độ của điểm A''_0 là: $x_0 + 2a > x_0 = \beta$ (1)

Do $A''_0 \in M$, nên theo định nghĩa của số β, ta có:

$$x_0 + 2a \leq \beta \qquad (2)$$

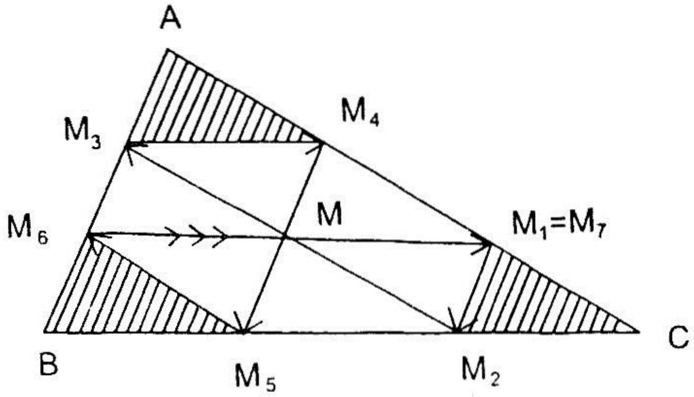
Từ (1) và (2) suy ra điều vô lí, vậy giả thiết phản chứng là sai

⇒ đ.p.c.m..

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC, một điểm M nằm trong tam giác, chuyển động song song với cạnh BC cho đến khi cắt cạnh CA, sau đó di động song song với cạnh AB cho đến khi gặp cạnh BC, tiếp đó di động song song với cạnh AC, cho đến khi gặp cạnh AB v.v... . Chứng minh rằng sau một số bước thì quỹ đạo của điểm di động M là một đường gấp khúc khép kín.

BÀI GIẢI

Kí hiệu liên tiếp các điểm của quỹ đạo nằm trên các cạnh của tam giác ABC là M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8... (xem hình vẽ).



Do $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{CM_4}$,

nên khi xét phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{M_2M_3}$, ta có:

$$T_{\overrightarrow{M_2M_3}}$$

$$M_1 \to A$$

$$M_2 \to M_3$$

$$C \to M_4$$

Tức là $\Delta M_1M_2C \xrightarrow{T_{\overrightarrow{M_2M_3}}} \Delta AM_3M_4$ (1)

Lí luận tương tự, ta có:

$\Delta AM_3M_4 \xrightarrow{T_{\overrightarrow{M_4M_5}}} \Delta M_6BM_5$ (2)

$\Delta M_6BM_5 \xrightarrow{T_{\overrightarrow{M_5C}}} \Delta M_7M_8C$ (3)

Theo tính chất của phép tịnh tiến, từ (1) (2) (3) suy ra:

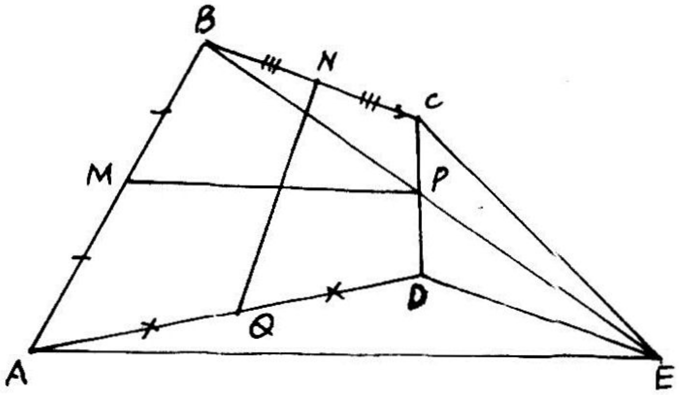
$$\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{M_4A} = \overrightarrow{M_5M_6} = \overrightarrow{CM_7}$$

Nói riêng ta có: $\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CM_7} \Rightarrow M_7 \equiv M_1$.

Vậy cùng lắm là sau 7 bước thì quĩ đạo là một đường gấp khúc khép kín ⇒ đ.p.c.m..

Ví dụ 10⊛. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Giả sử MP + NQ = p , ở đây p là nửa chu vi của tứ giác. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

BÀI GIẢI



Xét phép tịnh tiến theo véc tơ BC : $T_{\overrightarrow{BC}}$

Trong phép tịnh tiến này giả sử D → E

Theo tính chất của phép tịnh tiến, ta có: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ BCED là hình bình hành.

Do P là trung điểm của CD

$\Rightarrow$ B, P, E thẳng hàng. Trong tam giác BAE, do MP là đường trung bình nên $MP = \frac{1}{2}AE$.

Trong tam giác ADE có: $AE \leq AD + DE$

$$\Rightarrow MP \leq \frac{1}{2}(AD + BC) \qquad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ A, D, E thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ AD // BC

Lí luận hoàn toàn tương tự ta có: $NQ \leq \frac{1}{2}(AB + CD) \qquad (2)$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ AB // CD

Từ (1) (2) suy ra $MP + NQ \leq p \qquad (3)$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) và (2) $\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

Theo giả thiết, ta có $MP + NQ = p$, vậy tứ giác ABCD đã cho là hình bình hành $\Rightarrow$ đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 11. Cho hình bình hành ABCD có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng $2l$, còn A, B, D nằm trên một đường tròn cố định tâm O, bán kính R . Tìm quĩ tích đỉnh C .

BÀI GIẢI

AO kéo dài cắt đường tròn ở K, vậy K cố định. Gọi H là trực tâm tam giác ABD, I là trung điểm của BD. Theo tính chất của đường thẳng Euler (xem chương I), ta có H, G, O thẳng hàng và HG = 2GO, ở đây G là trọng tâm tam giác của Δ ABD. Từ đó suy ra:

AH = 2OI (1).

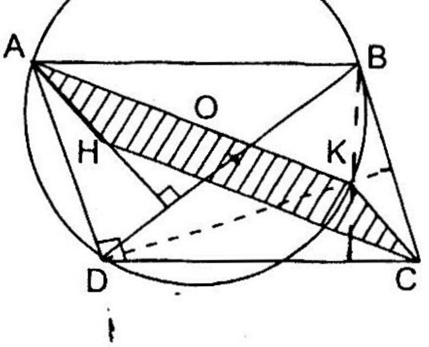
Theo định lí Pitago, có $OI = \sqrt{R^2 - l^2} = \text{const}$ (2)

Từ (2) suy ra H nằm trên đường tròn tâm A, bán kính $r = \sqrt{R^2 - l^2}$. Do $\widehat{ABK} = \widehat{ADK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), mà AB // DC , AD // BC ⇒ BK ⊥ DC và DK ⊥ BC , vậy K là trực tâm tam giác BDC ⇒ CK ⊥ DB ⇒ CK // AH (3).

Trong tam giác ACK, do OI là đường trung bình, nên KC = 2OI ⇒ KC = AH ⇒ AHKC là hình bình hành. Xét phép tịnh tiến theo véc tơ AK , ta có:

$$H \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AK}}} C$$

Vậy quỹ tích của C là ảnh của quỹ tích của H qua phép tịnh tiến T_{AK} .

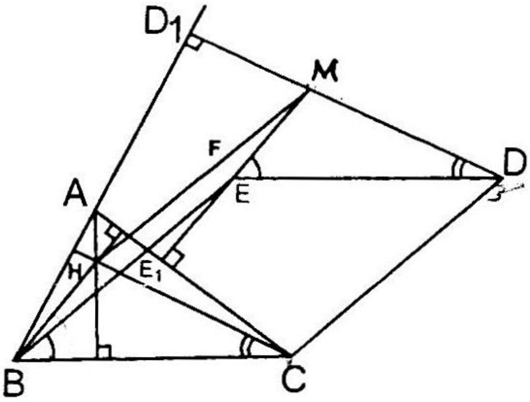


Do $$A \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AK}}} K$$

Vậy quĩ tích của C là đường tròn tâm K, bán kính = $\sqrt{R^2 - l^2}$.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC cố định. Vẽ hình thoi BCDE. Từ D kẻ $DD_1 \perp AB$, và từ E kẻ $EE_1 \perp AC$. Các đường thẳng DD_1 và EE_1 cắt nhau tại M. Tìm quĩ tích M.

BÀI GIẢI



Gọi H là trực tâm ABC,

$\Rightarrow$ H cố định. Ta có :

$HC \parallel DD_1$ (vì cùng $\perp AB$).

$HB \parallel EE_1$ (vì cùng $\perp AC$)

$\Rightarrow \quad \widehat{MED} = \widehat{HBC}$ và

$\widehat{MDE} = \widehat{HCB}$ (góc có cạnh tương ứng //)

$\Rightarrow \quad \Delta MDE = \Delta HBC$ (g.c.g) $\Rightarrow CH = MD$.

Do CH // MD, vậy: $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DM}$.

Xét phép tịnh tiến theo véc tơ CH: $T_{\overrightarrow{CH}}$, có:

$$D \xrightarrow{T_{\overrightarrow{CH}}} M$$

Vậy quĩ tích của M là ảnh của quĩ tích của D qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{CH}}$. Vì CD = a = const (ở đây BC = a), nên quĩ tích D là đường tròn tâm C, bán kính a.

$$\text{Do} \quad : \quad C \xrightarrow{T_{\overrightarrow{CH}}} H$$

nên quĩ tích của M là đường tròn tâm H, bán kính a.

Ví dụ 13. Cho đường tròn tâm O, bán kính R cố định, AB là một đường kính cố định của đường tròn, MN là đường kính di động. Tiếp tuyến tại B cắt AM, AN tại P và Q. Tìm quĩ tích trực tâm tam giác MPQ.

BÀI GIẢI

Do $\widehat{NAM} = 90^0$, vậy QA là chiều cao của Δ MPQ kẻ từ Q

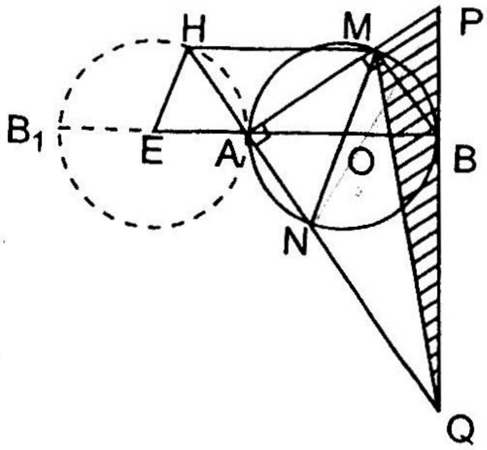
Gọi H là trực tâm Δ MPQ, thì H $\in$ đường thẳng QA. Do H là trực tâm Δ MPQ, nên HM $\perp$ PQ $\Rightarrow$ HM // AB (vì cùng $\perp$ PQ).

Tương tự có QH // BM (vì cùng $\perp$ AP) $\Rightarrow$ HMAB là hình bình hành, nên $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{BA}$.

Như thế ta có: $M \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} H$

Do M chạy trên đường tròn (O, R), trừ ra hai điểm A, B, vậy H chạy trên đường tròn là ảnh của đường tròn (O, R) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$, bỏ đi hai điểm A (là ảnh của B trong phép T_{BA}) và B_1 (là ảnh của A trong phép tịnh tiến nói trên). Giả sử:

$$O \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} E$$



Khi đó quĩ tích trực tâm H của tam giác MPQ là đường tròn tâm E bán kính R bỏ đi hai điểm A và B_1 (ở đây B_1 là ảnh của A qua phép $T_{\overrightarrow{BA}}$).

***Chú ý**: Quĩ tích trên cũng chính là quĩ tích của trực tâm tam giác NPQ.*

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 là các trung điểm của ba cạnh BC, CA, AB. Gọi O_1, O_2, O_3 và I_1, I_2, I_3 tương ứng là các tâm đường tròn ngoại tiếp và các tâm đường tròn nội tiếp của ba tam giác AB_1C_1, BC_1A_1 và CA_1B_1.

Chứng minh rằng: $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$

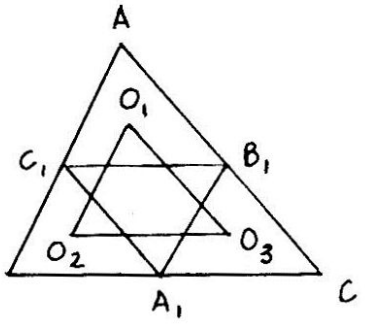
BÀI GIẢI

Xét phép tịnh tiến theo véc tơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, ta có:

$$\begin{array}{c} T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} \\ A \longrightarrow C_1 \\ C_1 \longrightarrow B \\ B_1 \longrightarrow A_1 \end{array}$$

Vậy theo tính chất của phép tịnh tiến suy ra:

$$\begin{array}{c} T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} \\ A\,C_1\,B_1 \longrightarrow C_1BA_1 \\ O_1 \longrightarrow O_2 \\ I_1 \longrightarrow I_2 \end{array}$$



Như vậy: $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{I_1I_2}$

Lý luận tương tự (bằng cách xét các phép tịnh tiến $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$, $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}}$) suy ra $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{I_2I_3}$ và $\overrightarrow{O_3O_1} = \overrightarrow{I_3I_1}$

Từ đó ta có : $\Delta\, O_1O_2O_3 = \Delta\, I_1I_2I_3$ (c.c.c) $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 15. Cho hai dây cung không cắt nhau AB,CD của đường tròn tâm O. Tìm trên đường tròn một điểm X sao cho các dây cung AX và BX định ra trên dây cung CD đoạn EF có độ dài a cho trước.

BÀI GIẢI

Giả sử đã dựng được điểm X theo yêu cầu đề ra. Xét phép tịnh tiến theo véc tơ EF. Ta có :

$$A \xrightarrow{T_{\overrightarrow{EF}}} A'$$

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow$ A'FEA là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{A'FB} = \widehat{AXB}$. Chú ý rằng $\widehat{AXB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$. Từ đó suy ra F nằm trên giao của đoạn thẳng CD với cung chứa góc bằng $\frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$ dựng trên đoạn A'B.

Như thế ta tiến hành phép dựng như sau:

- Xét véc tơ $\overrightarrow{\alpha}$, đó là véc tơ có phương // CD, có chiều từ C → D và có độ dài bằng a

- Gọi A' là ảnh của A trong phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{\alpha}}$

$$A \xrightarrow{T_{\overrightarrow{\alpha}}} A'$$

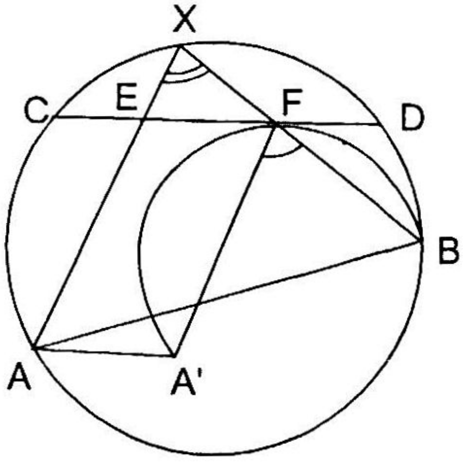
- Vẽ cung chứa góc $\frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$, dựng trên A'B.

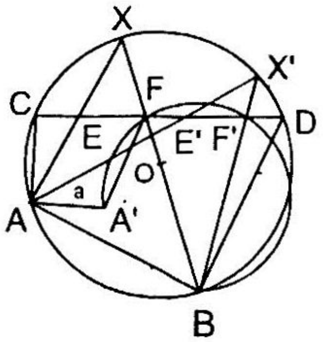
- Giao của cung chứa góc với CD là điểm F.

- Nối BF cắt đường tròn tại X.

- Nối AX cắt CD tại E. Ta thấy $\widehat{AXB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$

$\Rightarrow$ AX // FA' $\Rightarrow$ EFAA' là hình bình hành $\Rightarrow$ EF = a.

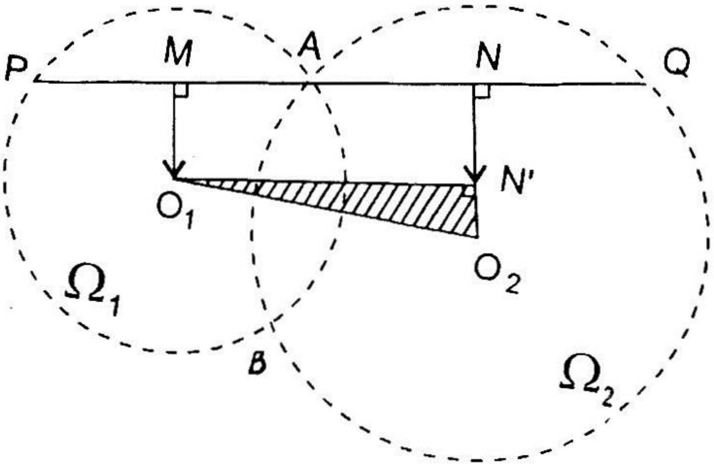




Số nghiệm của bài toán phụ thuộc vào số giao điểm của cung chứa góc với đoạn CD. (Có bao nhiêu giao điểm, có bấy nhiêu điểm X cần tìm. Bài toán tối đa có hai điểm X thỏa mãn yêu cầu đề ra). Hai hình vẽ sau trong trường hợp có một giao điểm và hai giao điểm.

Ví dụ 16. Cho hai đường tròn Ω_1 và Ω_2 cắt nhau tại A và B. Kẻ qua A đường thẳng Δ sao cho đoạn thẳng của đường thẳng đó nằm trong các đường tròn Ω_1, Ω_2 có độ dài $2l$ cho trước.

BÀI GIẢI



Giả sử đã dựng được dây cung PQ qua A, sao cho $P \in \Omega_1$, $Q \in \Omega_2$ và $PQ = 2l$.

Kẻ O_1M và $O_2N \perp PQ$. Xét phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{MO_1}$, ta có :

$$N \xrightarrow{T_{\overrightarrow{MO_1}}} N'$$

Từ đó suy ra : $O_1N' = MN = \frac{1}{2}\ PQ = l$

Điểm N' là đỉnh thứ ba của tam giác vuông O_1O_2N' có cạnh huyền O_1O_2, và cạnh góc vuông $O_2N' = \sqrt{O_1O_2^2 - l^2}$. Từ đó suy ra cách dựng như sau:

- Dựng tam giác vuông $N'O_1O_2$, biết cạnh huyền O_1O_2, và cạnh góc vuông bằng $\sqrt{O_1O_2^2 - l^2}$

- Qua A kẻ dây cung vuông góc với O_2N', đó chính là dây cung PQ cần dựng.

Thật vậy, ta có $PQ = 2MN = 2O_1N' = 2l$

Bài toán dựng được nếu như $O_1O_2 \geq l$

Ví dụ 17. Cho hai đường thẳng song song Δ_1 và Δ_2 và hai điểm A,B như hình vẽ.

Tìm $M \in \Delta_1$, $N \in \Delta_2$ sao cho $MN \perp \Delta_1$ và AM + MN + NB là ngắn nhất.

BÀI GIẢI

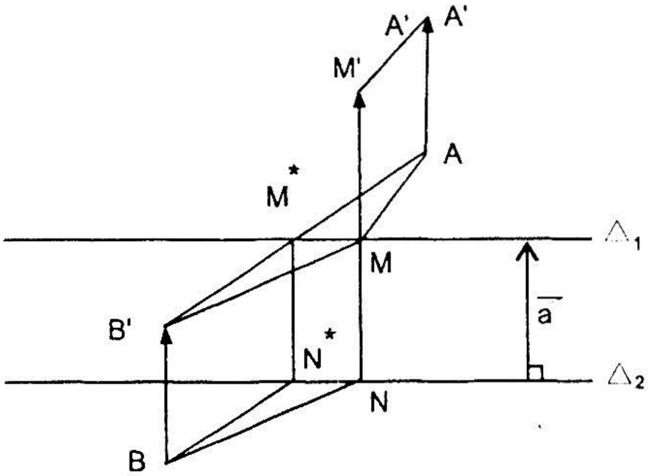
Giả sử M tùy ý $\in \Delta_1$, $N \in \Delta_2$ sao cho $MN \perp \Delta_1$. Gọi $\vec{a}$ là véc tơ (xem hình vẽ). Xét phép tịnh tiến theo $\vec{a}$: $T_{\vec{a}}$ ta có:

$$B \xrightarrow{T_{\vec{a}}} B'$$

$$N \longrightarrow M$$

$$M \longrightarrow M'$$

$$A \longrightarrow A'$$



Khi đó :

$$AMNB \xrightarrow{T_{\vec{a}}} A'M'MB' \qquad (1)$$

Do vậy $\quad AM + MN + NB = A'M' + M'M + MB' \quad (2)$

Chú ý rằng qua phép tịnh tiến $T_{\vec{a}}$, thì B', và A' cố định

Do $\quad M'M = \text{const}\ \ \forall$ vị trí của $M \in \Delta_1$, nên từ (2) suy ra :

$$(AM + MN + NB) \min \Leftrightarrow (A'M' + MB') \min.$$

$$\Leftrightarrow (AM + MB') \min.$$

Vì $\quad AM + MB' \geq AB'$, mà A,B' cố định.

Vậy $(AM + MB') \min \Leftrightarrow$ A,M,B' thẳng hàng.

Từ đó suy ra nếu gọi $M^* \in \Delta_1$, $N^* \in \Delta_2$ là hai điểm cần tìm, thì $M^* = AB' \cap \Delta_1$, còn N^* là hình chiếu của M^* là Δ_2.

Chương VI

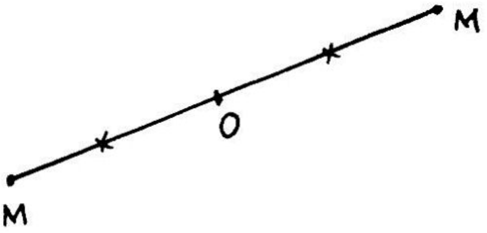
PHÉP ĐỐI XỨNG

§1. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

A. Phép đối xứng tâm: Cho O là một điểm cố định. Phép biến hình, biến một điểm M thành điểm M', sao cho:

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

được gọi là phép đối xứng qua tâm O, và kí hiệu là S_O.

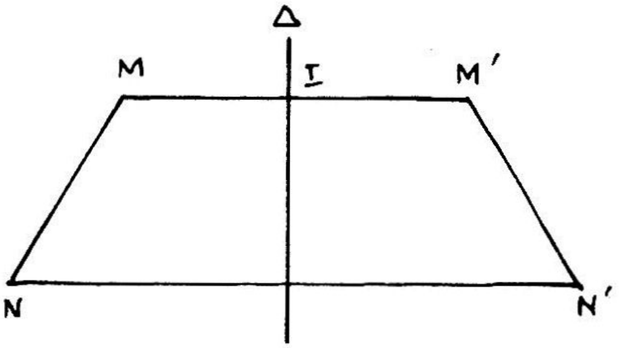


Rõ ràng ta có $S_O = R(O, 180^0)$

Như vậy phép đối xứng tâm, là một phép quay quanh tâm O một góc 180^0. Vì thế phép đối xứng tâm có các tính chất như tính chất của phép quay.

B. Phép đối xứng trục: Cho Δ là đường thẳng cố định

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' tương ứng sao cho MM' ⊥ Δ, cắt Δ tại điểm I và $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, gọi là phép đối xứng qua trục Δ, và kí hiệu là S_Δ



Tính chất cơ bản của phép đối xứng trục

Nếu $M \xrightarrow{S_\Delta} M'$

$N \longrightarrow N'$

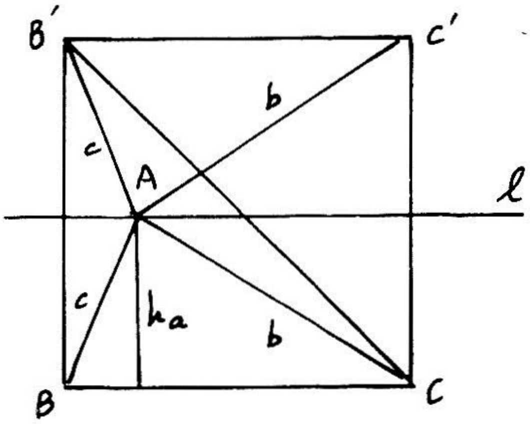
khi đó MN = M'N'

Như vậy phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng, đa giác, đường tròn, góc, miền góc thành hình bằng nó.

§2. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì, ta có bất đẳng thức sau: $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$, ở đây h_a là chiều cao kẻ từ A, p là nửa chu vi, a = BC.

BÀI GIẢI



Gọi l là đường thẳng qua A và // BC. Xét phép đối xứng trục S_l. Ta giả sử :

$$B \xrightarrow{S_l} B'$$

$$C \longrightarrow C'$$

$$A \longrightarrow A$$

Theo tính chất của phép đối xứng trục, ta có AB' = AB.

Vì vậy $b + c = CA + AB = CA + \underset{AB'}{CB'} \ge CB'$ (1)

Theo định lí Pitago, có $CB' = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = \sqrt{4h_a^2 + a^2}$ (2)

Thay (2) vào (1) có :

$$b + c \ge \sqrt{a^2 + 4h_a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (b + c)^2 - a^2 \ge 4h_a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (b + c + a)(b + c - a) \geq 4h_a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2p\,2(p - a) \geq 4h_a^2$$

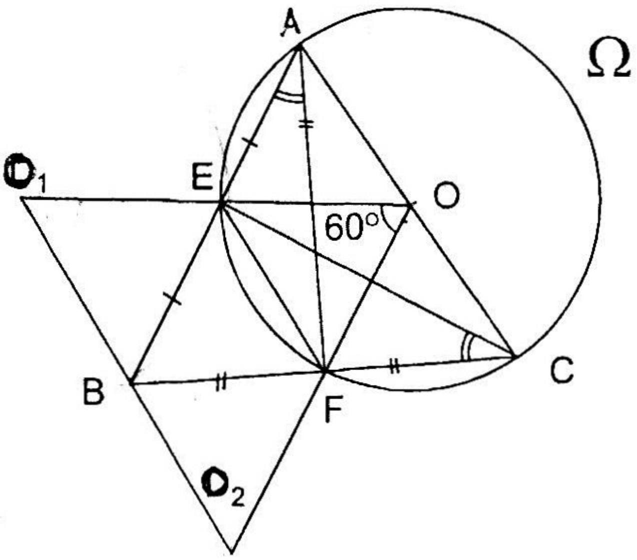
$$\Leftrightarrow \quad h_a \leq \sqrt{p(p - a)}$$

Đó là đ.p.c.m. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ C,A,B' thẳng hàng.

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác cân đỉnh A.

⊛ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC và hai trung tuyến AF và CE. Giả sử $\widehat{BAF} = \widehat{BCE} = 30^0$. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

BÀI GIẢI



Do $\widehat{EAF} = \widehat{ECF} = 30^0 \Rightarrow$ tứ giác EACF là tứ giác nội tiếp. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp tứ giác ấy và O là tâm của Ω. Xét phép đối xứng tâm S_E.

Ta có : $A \xrightarrow{S_E} B$

Vậy giả sử $\Omega \xrightarrow{S_E} \Omega_1$

thì do $A \in \Omega$, nên $B \in \Omega_1$. Lại có : $C \xrightarrow{S_F} B$

Và giả sử $\Omega \xrightarrow{S_F} \Omega_2$ thì do $C \in \Omega$, và $B \in \Omega_2$

Như thế B nằm trên giao của hai đường tròn Ω_1 và Ω_2, tức là:

$$B \in \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Do E,F đều nằm trên đường tròn Ω với tâm O $\Rightarrow$ OE = OF.

Lại có : $\widehat{EOF} = 2\,\widehat{EAF} = 60^0 \Rightarrow$ EOF là tam giác đều.

Gọi O_1 và O_2 tương ứng là tâm của Ω_1, Ω_2 thì:

$$O \xrightarrow{S_E} O_1 \quad \text{và} \quad O \xrightarrow{S_F} O_2$$

$\Rightarrow$ OO_1O_2 là tam giác đều với cạnh bằng 2R, ở đây R là bán kính của các đường tròn Ω, Ω_1, Ω_2.

Vì $B \in \Omega_1$ (với tâm O_1) $\Rightarrow$ $O_1B = R$.

Lại do $B \in \Omega_2$ (với tâm O_2) $\Rightarrow$ $O_2B = R$

$$\Rightarrow \quad BO_1 + BO_2 = O_1O_2 \qquad (1)$$

Đẳng thức (1) chứng tỏ O_1, B, O_2 thẳng hàng. Do OO_1O_2 là tam giác đều $\Rightarrow$ EBF là tam giác đều $\Rightarrow$ ABC cũng là tam giác đều. Đó chính là đ.p.c.m..

Ví dụ 3. Cho ba đường tròn bằng nhau (O_1,R), (O_2,R), (O_3,R) từng đôi tiếp xúc với nhau tại A, B, C (xem hình vẽ).

Giả sử M là điểm trên (O_1, R), ngoài ra:

$$M \xrightarrow{S_A} N \ ; \quad N \xrightarrow{S_B} P \ ; \quad P \xrightarrow{S_C} Q.$$

Chứng minh rằng $M \xrightarrow{S_{O_1}} Q$

BÀI GIẢI

Xét phép S_A

Do (O_1,R) tiếp xúc với (O_2,R) tại A, nên:

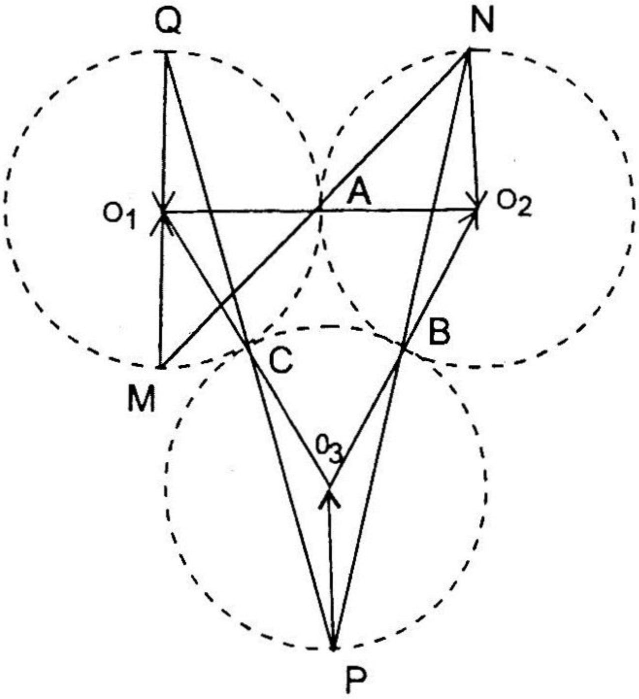
$$M \xrightarrow{S_A} N$$

$$O_1 \longrightarrow O_2$$

$$\Rightarrow \quad MO_1 \xrightarrow{S_A} NO_2,$$

hay $\overrightarrow{MO_1} = -\overrightarrow{NO_2}$ (1).

Tương tự do (O_2,R) tiếp xúc với (O_3,R) tại B, nên:



$$N \xrightarrow{S_B} P$$

$$O_2 \longrightarrow O_3$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NO_2} = -\overrightarrow{PO_3} \qquad (2)$$

Lại do (O_3,R) tiếp xúc với (O_1,R) tại C, nên:

$$P \xrightarrow{S_C} Q$$

$$O_3 \longrightarrow O_2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PO_3} = -\overrightarrow{QO_1} \qquad (3)$$

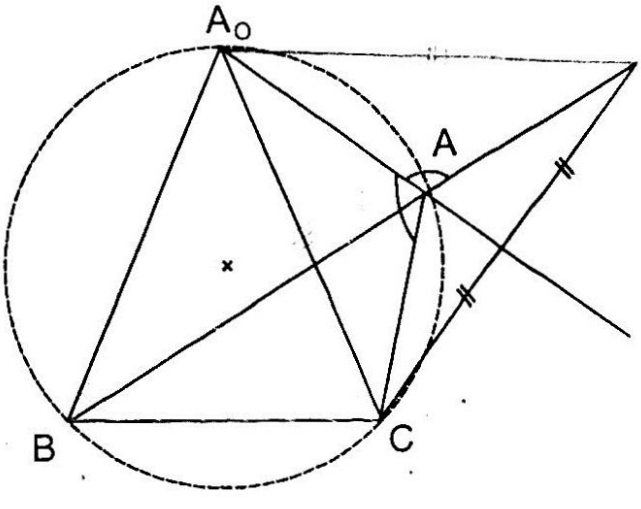
Từ (1) (2) (3) suy ra $\overrightarrow{MO_1} = -\overrightarrow{QO_1}$ (4)

Đẳng thức véc tơ (4) chứng tỏ rằng : $M \xrightarrow{S_{O_1}} Q$.

Đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, cạnh BC cố định. Tìm vị trí của A trên cung lớn BC sao cho chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất

BÀI GIẢI



Gọi A_0 là trung điểm của cung lớn $\overset{\frown}{BC}$

Giả sử A là điểm tuỳ ý trên cung lớn BC, và $C \xrightarrow{S_{A_OA}} M$

$\Rightarrow AM = AC$ (vì $A \xrightarrow{S_{A_OA}} A$)

và: $A_OM = A_OC$ (do $A_O \xrightarrow{S_{A_OA}} A_O$)

Ngoài ra cũng theo tính chất phép đối xứng trục, suy ra:

$\widehat{A_OAM} = \widehat{A_OAC}$ (1)

Vì A_OACB là tứ giác nội tiếp, nên:

$\widehat{A_OAC} + \widehat{A_OBC} = 180^0$, mà $\widehat{A_OBC} = \widehat{A_OCB}$

(do Δ A_OBC cân) và $\widehat{A_OCB} = \widehat{A_OAB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{A_OB}$)

$\Rightarrow \quad \widehat{A_OAC} + \widehat{A_OAB} = 180^0$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $\widehat{A_OAM} + \widehat{A_OAB} = 180^0 \Rightarrow$ B, A, M thẳng hàng.

Gọi $\mathscr{C}$ là chu vi Δ ABC, còn $\mathscr{C}_O$ là chu vi tam giác A_OBC, ta có:

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_O - \mathscr{C} &= (A_OB + A_OC + BC) - (AB + AC + BC)\\ &= (A_OB + A_OM) - (AB + AM)\\ &= A_OB + A_OM - BM \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{C}_O \geq \mathscr{C}.\end{aligned}$$

Vậy chu vi Δ ABC lớn nhất khi và chỉ khi $A \equiv A_O$ là trung điểm của cung lớn $\overset{\frown}{BC}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Tìm đường thẳng Δ qua đỉnh A sao cho với mọi điểm M trên Δ, ta đều có $\mathscr{C}_{MBC} \geq \mathscr{C}_{ABC}$, ở đây $\mathscr{C}_{MBC}$, $\mathscr{C}_{ABC}$ tương ứng là chu vi của Δ MBC và Δ ABC.

BÀI GIẢI

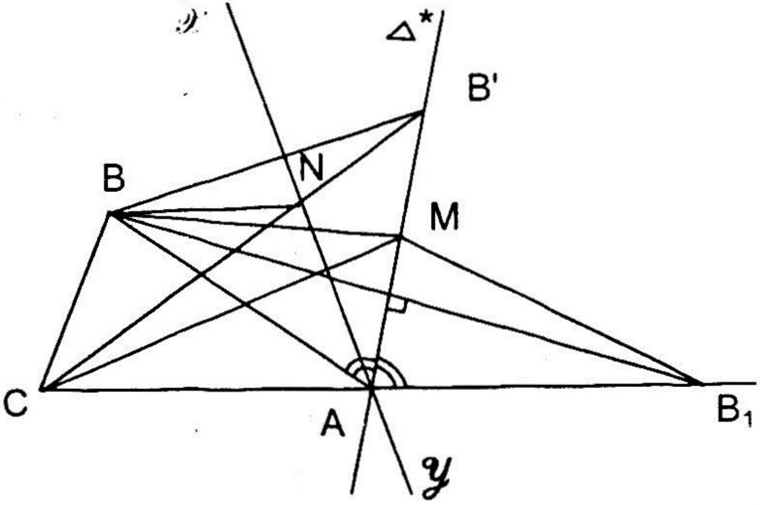
Gọi Δ* là phân giác ngoài của góc A. Xét phép $S_{\Delta*}$ và giả sử:

$$B \xrightarrow{S_{\Delta*}} B_1$$

Dễ thấy B_1 nằm trên CA kéo dài. Lấy M là điểm bất kỳ trên Δ*, khi đó ta có : $MB = MB_1$, $AB = AB_1$. Từ đó suy ra:

$$\mathscr{C}_{MBC} - \mathscr{C}_{ABC} = (MB + MC + BC) - (AB + AC + BC) =$$

$$= MC + MB_1 - (AC + AB_1) = MC + MB_1 - B_1C \ge 0 \Rightarrow \mathscr{C}_{MBC} \ge \mathscr{C}_{ABC}.$$



Vậy Δ* là một đường thẳng cần tìm. Xét đường thẳng xy bất kỳ qua A (vì xy ≠ Δ*). Rõ ràng trong hai tia Ax, Ay có một tia ở cùng phía với B đối với Δ* (chẳng hạn trong hình vẽ trên là tia Ax).

Xét phép S_{Ax}, và giả sử $B \xrightarrow{S_{Ax}} B'$

Gọi $N = B'C \cap Ax$. Khi đó tương tự như chứng minh phần trên, có:

$$\mathscr{C}_{NBC} - \mathscr{C}_{ABC} = (NB + NC) - (AB + AC) = (NB' + NC) - (AB' + AC)$$

$$= CB' - (CA + AB') < 0 \Rightarrow \mathscr{C}_{NBC} < \mathscr{C}_{ABC}$$

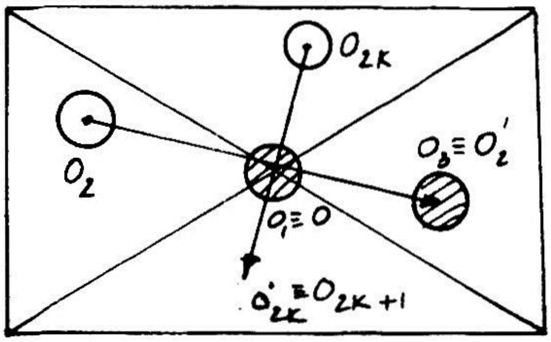
Vậy đường thẳng xy không phải là đường thẳng cần tìm. Như thế đường phân giác ngoài Δ* của góc A là đường thẳng duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 6. Hai người lần lượt đặt những đồng xu tròn lên một mặt bàn hình chữ nhật, người thứ hai đặt kế tiếp người thứ nhất cho đến khi bàn phủ đầy những đồng xu ấy. Mỗi người có thể đặt đồng xu một cách tuỳ ý lên các chỗ còn trống trên mặt bàn. Người nào không thể đặt tiếp đồng xu lên mặt bàn thì xem là thua cuộc.

Chứng minh rằng có một cách chơi đối với người đặt đồng xu đầu tiên, sao cho với cách chơi ấy người đó sẽ là người thắng cuộc.

BÀI GIẢI

Người thứ nhất giả sử đặt các đồng xu màu đen, còn người thứ hai chơi xu màu trắng. Ta xét chiến lược chơi như sau áp dụng cho người thứ nhất (đi trước).



- Người thứ nhất đặt đồng xu đen đầu tiên sao cho tâm O_1 của đồng xu tương ứng với tâm O của bàn chữ nhật.

- Giả sử người thứ hai đặt đồng xu trắng tâm O_2 lên bàn.

Xét phép đối xứng S_O và giả sử : $O_2 \xrightarrow{S_O} O'_2$

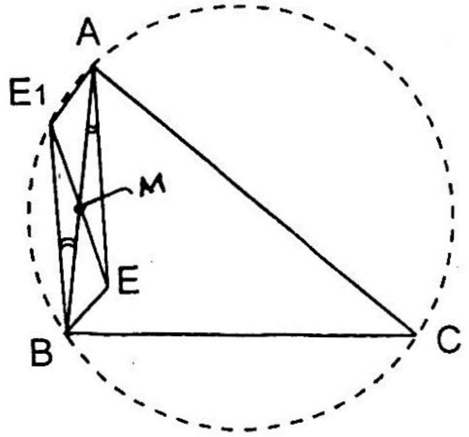
Khi đó người thứ nhất sẽ đặt đồng xu thứ hai tâm O_3 của mình sao cho $O_3 \equiv O'_2$. Quy luật đó cứ tiếp tục. Chú ý rằng nếu người thứ hai còn đặt được đồng xu tâm O_{2k} lên bàn, thì nếu gọi O'_{2k} là ảnh của O_{2k} qua phép S_O, thì vị trí đó còn có thể đặt được đồng xu đen tâm O_{2k+1} , với $O_{2k+1} \equiv O'_{2k}$.

Gọi s là diện tích của đồng xu và S là diện tích của bàn thì trò chơi sẽ kết thúc cùng lắm là sau $\left[\frac{S}{s}\right]$ bước, ở đây $\left[\frac{S}{s}\right]$ kí hiệu là phần nguyên của số $\frac{S}{s}$. Theo lập luận trên suy ra ngay, người thua cuộc sẽ là người chơi thứ hai (đi xu trắng). Đó chính là đ.p.c.m..

Chú ý: *Phần nguyên [α] của số α là số nguyên lớn nhất không vượt quá α. Thí dụ: [2,5] = 2 , [-2,3] = -3.*

Ví dụ 7. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm tất cả các điểm nằm bên trong tam giác sao cho ba điểm đối xứng với nó qua các trung điểm ba cạnh của tam giác đều nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

BÀI GIẢI



Gọi E là điểm cần tìm. Gọi M là trung điểm của AB và giả sử:

$$E \xrightarrow{S_M} E_1$$

Rõ ràng ta cũng có:

$$A \xrightarrow{S_M} B$$

$$B \xrightarrow{S_M} A$$

$$\Rightarrow \quad AEB \xrightarrow{S_M} BE_1A$$

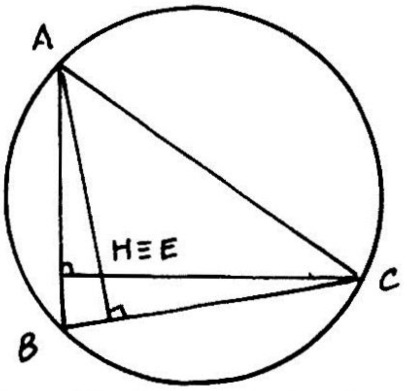
$$\Rightarrow \quad \widehat{AEB} = \widehat{BE_1A}$$

Vì E_1 nằm trên đường tròn, nên $\widehat{AE_1B} + C = 180^0 \Rightarrow$

$$\widehat{AEB} = 180^0 - C \qquad (1)$$

Lí luận hoàn toàn tương tự, có: $\widehat{AEC} = 180^0 - B \qquad (2)$

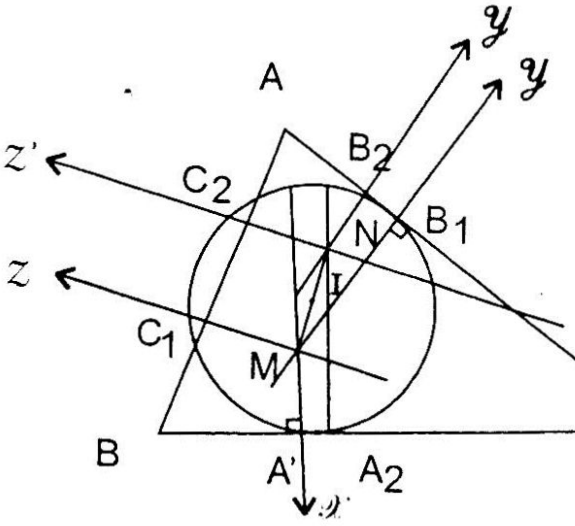
$$\widehat{BEC} = 180^0 - A \qquad (3)$$

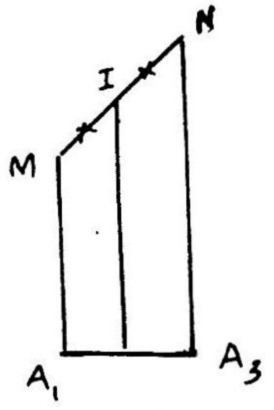


Vậy E là giao của ba cung chứa góc 180^0 - C dựng trên AB, 180^0 - B dựng trên AC và 180^0 - A dựng trên BC.

Theo hình học lớp 9 suy ra E là điểm duy nhất, và đó chính là trọng tâm H của tam giác ABC, như vậy E ≡ H.

Ví dụ 8. Đường tròn (Ω) tâm I cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tương ứng tại A_1, A_2; B_1, B_2; C_1 ; C_2 . Dựng $A_1x \perp BC$, $B_1y \perp CA$ và $C_1z \perp AB$ và $A_2x' \perp BC$, $B_2y' \perp CA$, $C_2z' \perp AB$. Giả sử A_1x, B_1y, C_1z đồng qui tại một điểm. Chứng minh rằng A_2x', B_2y', C_2z' cũng đồng qui.





Xét phép đối xứng tâm S_I. Giả sử A_1x, B_1y, C_1z đồng qui tại M và:

$$M \xrightarrow{S_I} N$$

Gọi A_3, B_3, C_3 tương ứng là hình chiếu của N lên BC, AC và AB.

Do N là ảnh của M qua phép S_I nên IM = IN, vì thế trong hình thang vuông A_1MNA_3 dễ dàng thấy $IA_2 = IA_3$, vậy $A_3 \in \Omega$, mà $A_3 \in BC \Rightarrow A_3 \in BC \cap \Omega$ tức là $A_3 \equiv A_2$.

Lý luận hoàn toàn tương tự có: $B_3 \equiv B_2$, $C_3 \equiv C_2$. Nói khác đi A_2x', B_2y', C_2z' đồng qui $\Rightarrow$ đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 9. Cho A, B, C ∈ đường thẳng xx' (B nằm giữa A và C). Một đường thẳng yy' ⊥ xx' tại C. Đường thẳng di động Δ qua A cắt yy' tại M. Qua B dựng đường vuông góc với Δ cắt yy' tại N. Chứng minh rằng khi Δ quay quanh A thì đường tròn ngoại tiếp Δ BMN còn đi qua một điểm cố định thứ hai.

BÀI GIẢI

Gọi $(\mathcal{C})$ là đường tròn qua A, M, N và giả sử B' là giao điểm thứ hai của $(\mathcal{C})$ với xx'. Do $yy' \perp xx' \Rightarrow AB \perp MN$; vả lại $BN \perp AM$, vậy B là trực tâm của Δ AMN. $\Rightarrow$ Vậy theo tính chất của trực tâm B suy ra B' đối xứng với B qua MN (vì theo hình học phẳng lớp 9 ta có CB = CB').

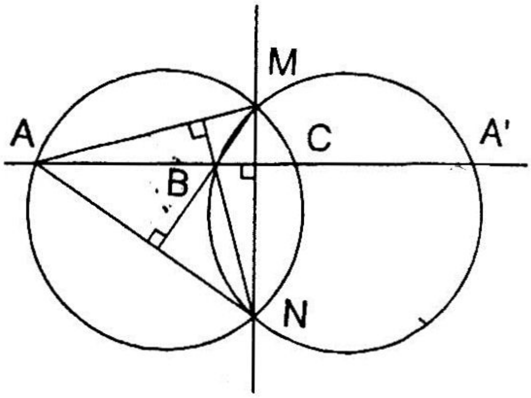
Xét phép đối xứng trục: $S_{yy'}$, ta có

$$B' \xrightarrow{S_{yy'}} B$$

$$M \longrightarrow M$$

$$N \longrightarrow N$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác B'MN biến thành đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN. Nếu gọi $(\mathcal{C}')$ là đường tròn ngoại tiếp Δ BMN, và chú ý rằng B', M, N đều $\in \mathcal{C}$,



Từ đó suy ra $\mathcal{C} \xrightarrow{S_{yy'}} \mathcal{C}'$

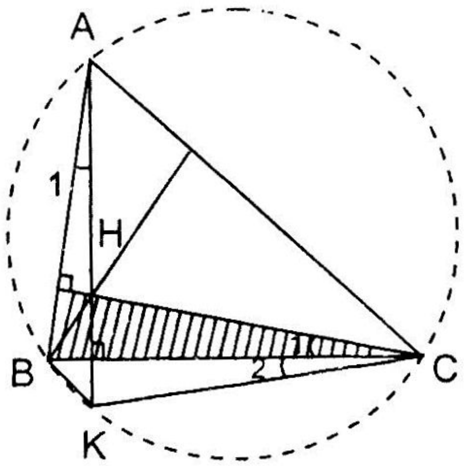
Giả sử $A \xrightarrow{S_{yy'}} A'$

Do $A \in \mathcal{C}$, nên $A' \in \mathcal{C}'$, vì A và yy' cố định, nên A' cố định $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN còn đi qua điểm cố định thứ hai A', trong đó A' là ảnh của A qua phép đối xứng trục $S_{yy'}$.

***Chú ý**: Từ ví dụ 9, ta có thể giải bài tập sau:*

Ví dụ 9'. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng bốn tam giác ABC, HBC, HAC, HAB có đường tròn ngoại tiếp bằng nhau.

BÀI GIẢI



Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$)

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow \Delta CHK$ cân $\Rightarrow$ K đối xứng với H qua BC. Xét phép đối xứng trục S_{BC}. Ta có :

$$K \xrightarrow{S_{BC}} H$$

$$B \longrightarrow B$$

$$C \longrightarrow C$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\Delta KBC \xrightarrow{S_{BC}}$ đường tròn ngoại tiếp ΔHBC

Chú ý rằng: đường tròn ngoại tiếp Δ BKC chính là đường tròn ngoại tiếp Δ ABC $\Rightarrow$ hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác HBC và ABC bằng nhau. Lý luận tương tự với các tam giác HAB và HAC suy ra đ.p.c.m..

Từ ví dụ 9' cho ta nhận xét sau đây: Các điểm đối xứng của trực tâm của một tam giác qua các cạnh nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ấy. Từ đó cho phép ta giải ví dụ sau:

Ví dụ 9''. Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C di động trên đường thẳng cố định Δ. Biết rằng trực tâm H của tam giác cố định và đường tròn ngoại tiếp của tam giác luôn đi qua một điểm cố định $P \neq H$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm quĩ tích O.

BÀI GIẢI

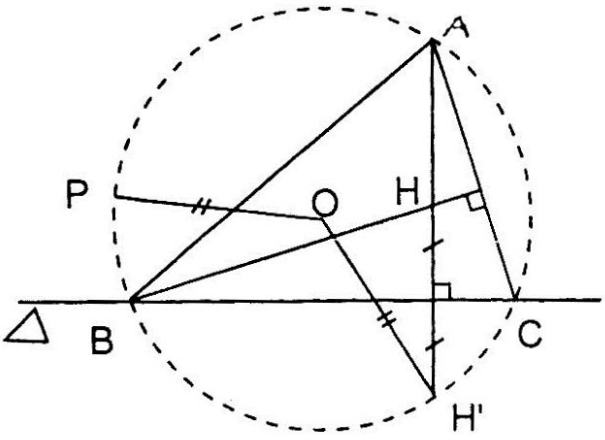
Gọi H' là ảnh của trực tâm H qua phép đối xứng trục S_Δ, theo nhận xét trên thì H' nằm trên đường tròn ngoại tiếp Δ ABC.

Vì $H \xrightarrow{S_\Delta} H'$ mà H, Δ cố định ⇒ H' cố định.

Rõ ràng do P, H' cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp Δ ABC ⇒ tâm O của đường tròn này nằm trên đường trung trực của PH'.

Tóm lại quĩ tích O là đường trung trực của đoạn PH', với $H' = S_\Delta(H)$.

Phần đảo xin dành cho các bạn đọc tự giải.



Ví dụ 10. Cho ABC là tam giác vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Về phía ngoài tam giác vẽ hai hình vuông ABDE và ACFG.

1/ Chứng minh tập hợp 6 điểm {B, C, F, G, E, D} có một trục đối xứng.

2/ Gọi K là trung điểm của EG. Chứng minh K ở trên đường thẳng AH.

3/ Gọi $P = DE \cap FG$. Chứng minh P ở trên đường thẳng AH.

4/ Chứng minh $CD \perp BP$, $BF \perp CP$.

5/ Chứng minh AH, CD, BF đồng qui.

BÀI GIẢI

1/ Do $\widehat{BAD} = 45^0$ và $\widehat{CAF} = 45^0$ nên 3 điểm D, A, F thẳng hàng.

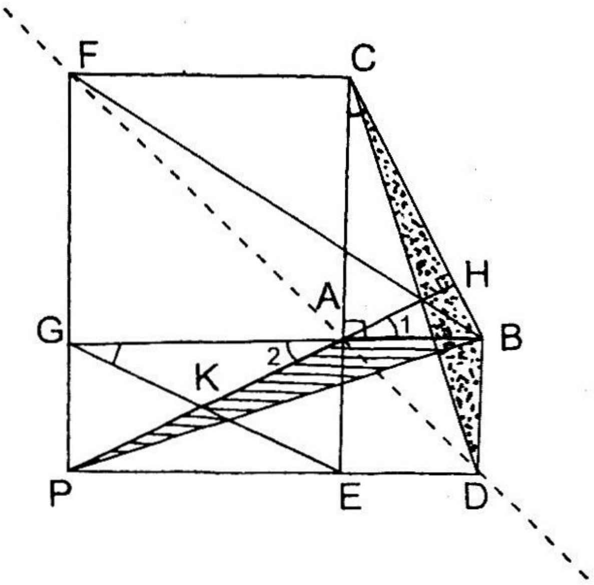
* Xét phép đối xứng trục DF. Ta có:

$A \longrightarrow A$; $D \longrightarrow D$; $F \longrightarrow F$

$C \longrightarrow G$

$B \longrightarrow E$ (Tính chất của hình vuông)

Vậy tập hợp gồm 6 điểm: {B, C, F, G, E, D} có trục đối xứng chính là đường thẳng DAF.



2/ Qua phép đối xứng trục nói trên ta có: $\Delta\ ABC = \Delta\ AEG$

nên: $\widehat{BCA} = \widehat{AEG}$

Nhưng: $\widehat{BCA} = \widehat{A_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) $\widehat{AGE} = \widehat{A_2}$ (do ΔKAG cân tại K) suy ra:

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

$\Rightarrow$ K, A, H thẳng hàng.

Nói cách khác K ở trên đường thẳng AH.

3/ Tứ giác AFPG là 1 hình chữ nhật nên: A, K, P thẳng hàng. (Hơn thế nữa K là trung điểm của AP). Vậy P ở trên đường thẳng AH.

4/ * Do Δ EDC và Δ DBP bằng nhau nên ta có: DC = BP.

$$\text{* Ta có: } \begin{cases} DC = BP \\ DB = AB \\ BC = AP\ (= EG) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta\ BDC = \Delta\ ABP \Rightarrow CD = BP. \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{APB}$

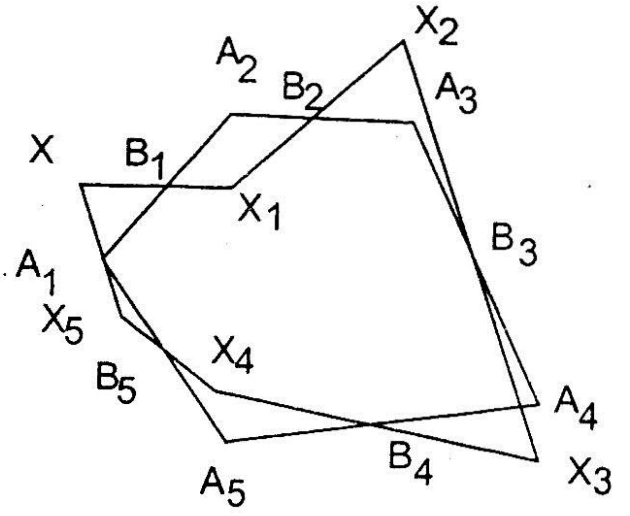
nhưng hai góc này có cặp cạnh : $BC \perp AP$. Suy ra cặp cạnh còn lại: $DC \perp BP$.

Lý luận tương tự, ta có : $BF \perp CP$.

5/ Ta chú ý tam giác BCP. Các đường thẳng AH, CD và BF chính là 3 đường cao của tam giác ấy nên đồng qui.

Ví dụ 11. Dựng một ngũ giác biết 5 trung điểm của các cạnh của ngũ giác.

BÀI GIẢI



Giả sử đã dựng được ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ nhận B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 cho trước là 5 trung điểm của năm cạnh.

Ta có: $A_1 \xrightarrow{S_{B_1}} A_2 \xrightarrow{S_{B_2}} A_3 \xrightarrow{S_{B_3}} A_4 \xrightarrow{S_{B_4}} A_5 \xrightarrow{S_{B_5}} A_1$

Như vậy $A_1 \xrightarrow{S_{B_5}S_{B_4}S_{B_3}S_{B_2}S_{B_1}} A_1$ (1)

Theo kết quả của phép tịnh tiến và phép đối xứng tâm (xem chương 5 , ví dụ 2, 3) thì $S_{B_5}S_{B_4}S_{B_3}S_{B_2}S_{B_1}$ là 1 phép đối xứng tâm. Rõ ràng mọi phép đối xứng tâm chỉ có một điểm bất động duy nhất, đó chính là tâm đối xứng.

Từ (1) suy ra: $S_{B_5}S_{B_4}S_{B_3}S_{B_2}S_{B_1} = S_{A_1}$ (2)

Từ đó suy ra cách dựng đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ như sau:

Lấy một điểm X bất kì trên mặt phẳng

Giả sử: $X \xrightarrow{S_{B_1}} X_1 \xrightarrow{S_{B_2}} X_2 \xrightarrow{S_{B_3}} X_3 \xrightarrow{S_{B_4}} X_4 \xrightarrow{S_{B_5}} X_5$

Vậy $X \xrightarrow{S_{A_1}} X_5$

Do đó A_1 là trung điểm của XX_5. Biết A_1 suy ra $A_1 \xrightarrow{S_{B_1}} A_2$

$A_2 \xrightarrow{S_{B_2}} A_3$; $A_3 \xrightarrow{S_{B_3}} A_4$; $A_4 \xrightarrow{S_{B_1}} A_5$.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ là ngũ giác cần dựng

Thật vậy, theo cách dựng ta có A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 tương ứng nhận B_1, B_2, B_3, B_4 làm trung điểm.

Do: $A_1 \xrightarrow{S_{B_5}S_{B_4}S_{B_3}S_{B_2}S_{B_1}} A_1$ mà $A_1 \xrightarrow{S_{B_4}S_{B_3}S_{B_2}S_{B_1}} A_5$

Vậy: $A_5 \xrightarrow{S_{B_5}} A_1$ (3)

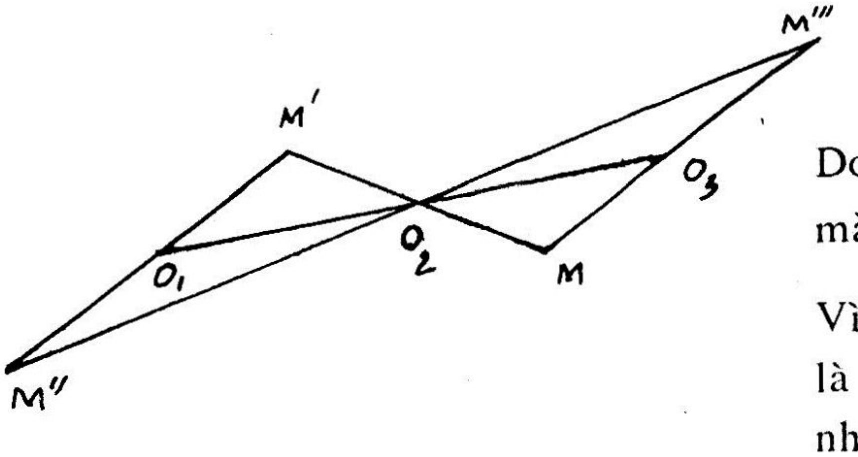
Từ (3) suy ra A_5A_1 nhận B_5 làm trung điểm. Có duy nhất một ngũ giác thoả mãn yêu cầu đề ra.

Chú ý: *Cách dựng trên có thể mở rộng sang 1 đa giác với 1 số lẻ cạnh bất kì, tức là nếu cho biết 2k+1 trung điểm của các cạnh của một (2k+1) - giác, thì ta có thể dựng được đa giác ấy theo cách đã trình bày trong ví dụ 11.*

Ví dụ 12. Nếu một hình biến thành chính nó qua phép đối xứng tâm A, thì A được gọi là tâm đối xứng của hình đó. Chứng minh rằng không có hình nào có đúng hai tâm đối xứng.

BÀI GIẢI

Giả sử(phản chứng)tồn tại hình Ω nào đó có đúng hai tâm đối xứng O_1 và O_2, khi đó dĩ nhiên O_1, O_2 đều $\in \Omega$.



Giả sử $O_1 \xrightarrow{S_{O_2}} O_3$

Do O_2 là tâm đối xứng, mà $O_1 \in \Omega \Rightarrow O_3 \in \Omega$.

Vì $O_1 \neq O_2 \Rightarrow O_1, O_2, O_3$ là ba điểm đôi một khác nhau.

Lấy M là điểm tuỳ ý $\in \Omega$. Do O_2 là tâm đối xứng, nên :

$M' = S_{O_2}(O_1) \in \Omega$. Tương tự, do O_1 là tâm đối xứng của Ω .

mà $M' \in \Omega$, vậy $M' \xrightarrow{S_{O_1}} M''$, thì $M'' \in \Omega$.

Cũng cùng lý do đó thì $M''' = S_{O_2}(M'') \in \Omega$.

Do $S_{O_2}S_{O_1}S_{O_2} = S_{O_3}$, vậy: $M \xrightarrow{S_{O_3}} M'''$ (*)

Đẳng thức (*) đúng $\forall$ $M \in \Omega$ và do $M''' \in \Omega$, nên theo định nghĩa suy ra O_3 cũng là tâm đối xứng của Ω, như vậy Ω có ba tâm đối xứng phân biệt O_1, O_2, O_3. Điều này dẫn đến mâu thuẫn, vậy giả thiết phải chứng là sai $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Chú ý: *Để chứng minh $S_{O_2}S_{O_1}S_{O_2} = S_{O_3}$, ta sử dụng kết quả trong các ví dụ 2, 3, chương 5 và để ý rằng* $O_1 \xrightarrow{S_{O_2}} O_3$

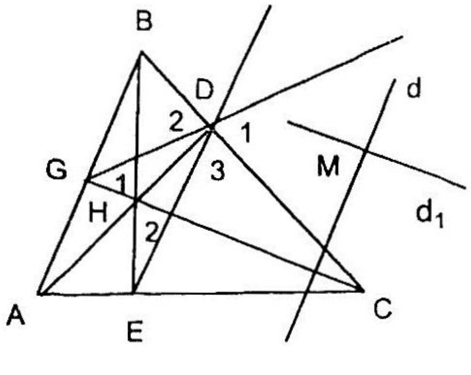
Ví dụ 13. Cho tam giác ABC và điểm M. Các đường cao AD, BE, CG đồng qui tại H. Hãy dựng qua M một đường thẳng d sao cho d // d' ở đây: $d' = S_{CA}S_{AB}S_{BC}$ (d).

BÀI GIẢI

Ta có các tứ giác nội tiếp BDHG, CEHG (do có cặp góc đối cùng vuông). Do đối đỉnh hoặc nội tiếp cùng chắn một cung mà ta có:

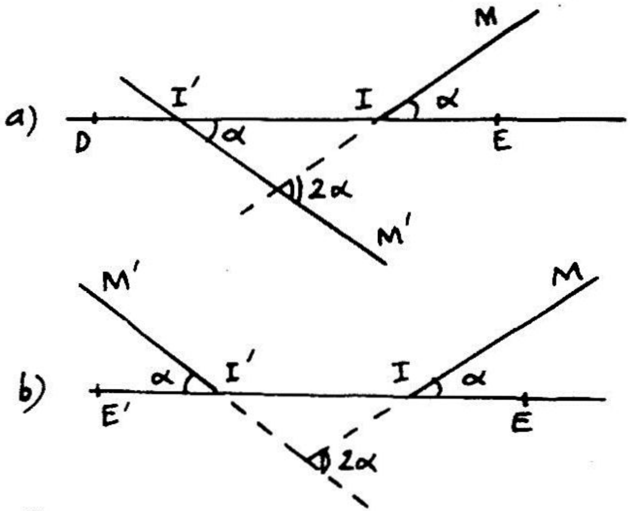
$$\widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = \widehat{D_3}$$

Từ $\widehat{D_1} = \widehat{D_3}$, ta có phép đối xứng trục BC biến đường thẳng ED thành đường thẳng DG. Một cách tương tự, ta cũng có S_{AB}: DG $\to$ GE và S_{AC}: GE $\to$ ED.



Đặt $F = S_{CA}.S_{AB}.S_{BC}$, ta có F: DE → DE (1)

Qua M kẻ đường thẳng d_1 // DE. Do bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên phép đối xứng trục biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song. Suy ra $F(d_1)$ // F(DE) Từ (1) ta có F(DE) = DE nên $F(d_1)$ // DE //d_1, hay d_1 là một đường thẳng cần tìm.



Qua M ta lại kẻ đường thẳng d_2 cắt đường thẳng DE tại một điểm I tạo thành góc nhọn $\widehat{MIE}$ bằng α. Ta có F : IE → I'E'; IM → I'M' và ảnh của góc $\widehat{MIE}$ trong phép biến hình F là góc $\widehat{M'I'E'}$.

Một mặt ta có $\widehat{M'I'E'} = \widehat{MIE} = \alpha$; mặt khác, về hướng thì qua mỗi phép đối xứng trục S_{BC}, S_{AB}, S_{CA} ảnh lại đổi hướng một lần so với tạo ảnh nên qua ba phép đối xứng ấy, ta thu được góc $\widehat{M'I'E'}$ ngược hướng với góc $\widehat{MIE}$. Do (1) nên F: IE ∈ DE → I'E' ∈ DE. Với $\alpha = 90^0$, ta có I'M' // IM (vì cùng ⊥ DE) hay d_2 là một nghiệm hình. Còn với $\alpha \neq 90^0$ thì hoặc IE, I'E' là hai tia cùng hướng (hình a) hoặc đó là hai tia ngược hướng (hình b). Trong cả hai trường hợp ta đều có 1 góc tạo bởi hai đường thẳng chứa tia IM, chứa tia IM' bằng 2α ($\neq 180^0$) hay chúng không song song.

Vậy bài toán có hai nghiệm hình là hai đường thẳng d_1, d_2 kẻ qua M sao cho d_1 // DE, còn d_2 ⊥ DE.

Ví dụ 14. Cho góc $\widehat{xOy}$, tia đối của Ox là tia Ox'. Trong góc $\widehat{x'Oy}$ có hai điểm A, B sao cho AB không song song cũng như không vuông góc với Oy. Hãy dựng điểm C trên Ox sao cho tia Oy cắt các đoạn thẳng CA, CB tại M, N tương ứng để cho CMN là tam giác cân đỉnh C.

BÀI GIẢI

Giả sử đã dựng được C thoả mãn yêu cầu đề ra. Ta có $C \in Ox$, $CA \cap Oy = M$, $CB \cap Oy = N$ và $CM = CN$. Xét phép đối xứng trục S_{OX} và giả sử:

$$B \xrightarrow{S_{OX}} B'$$

$$\Rightarrow \widehat{OCB'} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{ACB'} = \widehat{C_1} + \widehat{OCB'} = \widehat{C_1} + \widehat{OCB} \qquad (1)$$

Gọi β là góc đáy trong tam giác cân CMN, thì ta có $\widehat{C_1} = \beta - \alpha$ và $\widehat{OCN} = 180^0 - \alpha - \beta$ ở đây $\alpha = \widehat{xOy}$.

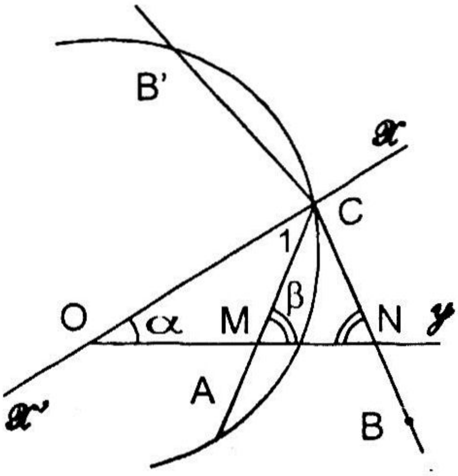
Thay vào (1) suy ra: $\widehat{ACB'} = \beta - \alpha + (180^0 - \alpha - \beta) = 180^0 - 2\alpha$

$\Rightarrow$ C nằm trên cung chứa góc $180^0 - 2\alpha$ dựng trên AB'. Từ đó suy ra cách dựng sau đây:

Cách dựng:

- Dựng ảnh B' của B trong phép đối xứng trục S_{OX}.
- Dựng cung chứa góc $180^0 - 2\alpha$ với $\alpha = \widehat{xOy}$ trên AB'.
- Cung chứa góc này cắt Ox tại C
- Nếu CA, CB lần lượt cắt Oy tại M, N

Chứng minh:



C là điểm phân dạng vì nếu đặt $\widehat{CMN} = \beta \Rightarrow \widehat{C_1} = \beta - \alpha$. Ta có $\widehat{OCN} = \widehat{OCB'}$ (do đối xứng trục) mà $\widehat{OCB'} = \widehat{ACB'} - \widehat{C_1} = 180^0 - 2\alpha - (\beta - \alpha)$ $= 180^0 - \alpha - \beta \Rightarrow$ trong tam giác OCN có: $\alpha + N = 180^0 - (\widehat{OCN}) =$

$= 180^0 - (180^0 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$

$\Rightarrow \widehat{N} = \beta$ vậy : CMN là tam giác cân.

Biện luận: Bài toán có 1 nghiệm hình (hoặc vô nghiệm) tuỳ theo cung chắn góc $\widehat{AB}'$ có hay không cắt tia Ox.

Ví dụ 15. Cho đường tròn $(\mathscr{O})$, hai dây AB và CD của đường tròn và điểm I thuộc dây CD. Dựng điểm M trên đường tròn sao cho các dây AM và BM chắn ra trên dây CD đoạn EF nhận I làm trung điểm.

BÀI GIẢI

Phân tích: Giả sử đã dựng được M thoả mãn đầu bài; MA, MB chắn dây cung CD ⇒ M khác phía với A, B so với CD, mặt khác dựng các hình bình hành $IEAE_1$, $IFBF_1$. Gọi J là trung điểm của AB, rồi lấy đối xứng I qua J thành K ta có: AE_1 song song và bằng F_1B ⇒ J là trung điểm E_1F_1 ⇒ IE_1KF_1 là hình bình hành

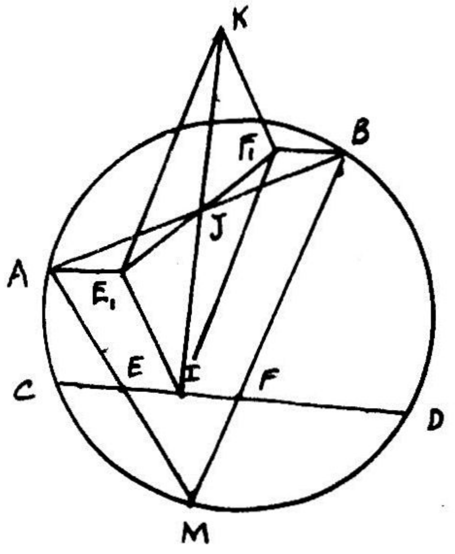
$\Rightarrow \widehat{IE_1K} = 180^0 - \widehat{E_1IF_1}$

$\Rightarrow \widehat{IE_1K} = 180^0 - \widehat{ACB}$.

Cách dựng

- Dựng K đối xứng I qua J.

- Dựng cung chứa góc nhìn dây IK một góc = $180^0 - \widehat{ACB}$, cùng phía với A so với IK, gọi cung đó là (γ).



- Dựng đường thẳng (d) qua A và song song với CD.

- Giao điểm của (d) và (γ) là điểm E_1.

- Đường thẳng qua A, song song với E_1I, cắt (O) tại M là điểm cần dựng.

Chứng minh: Gọi F_1 là điểm đối xứng của E_1 qua J; ta có: AE_1IE là hình bình hành $\Rightarrow IE = AE_1$, mà $AE_1 = F_1B$ (AE_1BF_1 là hình bình hành). $\Rightarrow IE = F_1B$.

Mặt khác $\widehat{E_1IF_1} = 180^0 - \widehat{KE_1I} = \widehat{ACB} = \widehat{AMB}$; lại có:

$IE_1 \parallel MA \Rightarrow IF_1 \parallel MB$, mà $BF_1 \parallel AE_1 \parallel CD \Rightarrow IFBF_1$ là hình bình hành. $\Rightarrow IF = BF_1$. Vậy $IF = IE$.

Biện luận: Số nghiệm hình chính là số giao điểm của (γ) và d.

> **Ví dụ 16.** Cho A, B ở cùng một phía với đường thẳng x'x. Dựng điểm M trên x'x sao cho $\widehat{AMx'} = 2\widehat{BMx}$.

BÀI GIẢI

Phân tích Giả sử dựng được điểm $M \in x'x$ sao cho:

$$\widehat{AMx'} = 2.\ \widehat{BMx}$$

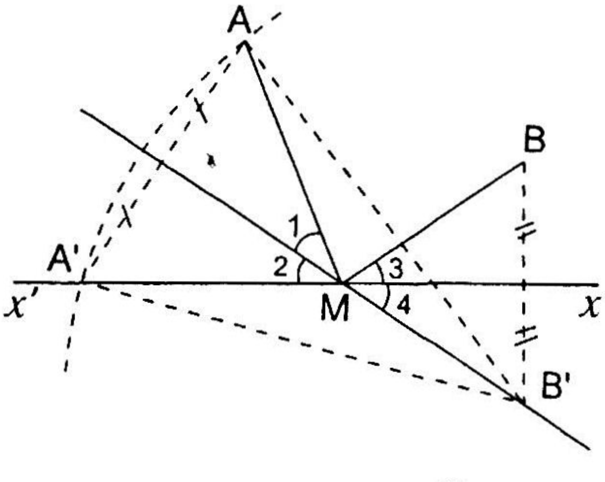
Gọi B' là điểm đối xứng của B qua x'x. Ta có:

$\widehat{M_3} = \widehat{M_4}$ (tính đối xứng)

$\widehat{M_2} = \widehat{M_4}$ (góc đối đỉnh)

Suy ra: $\widehat{M_2} = \widehat{M_3} = \frac{1}{2}\widehat{AMx'}$

$\Rightarrow \quad \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{M_3}$



Như vậy đường thẳng B'M là đường phân giác góc $\widehat{AMx'}$, nên ảnh A' của A qua phép đối xứng trục B'M phải ở trên đường thẳng x'x. Do đó:

$$B'A = B'A'$$

Cách dựng:

- Dựng điểm B' đối xứng của B qua x'x.

- Dựng đường tròn tâm B', bán kính B'A. Đường tròn này cắt x'x tại A'.

- Dựng trung trực của đoạn AA'. Đường này cắt x'x tại M.

Đó là điểm phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có:

$$\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{M_4} \\ \widehat{M_3} = \widehat{M_4} \end{cases} \Rightarrow \quad \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{2M_3}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{AMx'} = 2.\widehat{BMx}$$

Biện luận: Vì A, B ở cùng phía đối với x'x nên A, B' ở hai phía đối với x'x.

Do đó đường tròn tâm B' bán kính B'A cắt x'x tại hai điểm M và M': Bài toán luôn luôn có hai nghiệm hình.

Ví dụ 17. Trên đường tròn (O,R) cho hai điểm cố định A, B. Đường tròn (O',R') tiếp xúc ngoài với (O,R) tại A. Một điểm M di động trên (O,R). MA cắt đường tròn (O',R') tại điểm thứ hai A_1. Qua A_1 kẻ đường song song với AB cắt MB tại B_1.

Tìm quĩ tích B_1.

BÀI GIẢI

Giả sử B_1A_1 cắt lại (O',R') tại điểm thứ hai là A_2. Vẽ tiếp tuyến chung xx' của hai đường tròn (O,R) và (O',R'). Theo tính chất của tiếp tuyến với đường tròn, ta có:

$$\widehat{ABM} = \widehat{xAM}\ ;$$

$$\widehat{AA_2A_1} = \widehat{x'AA_1}$$

Do: $\widehat{x'AA_1} = \widehat{xAM}$ (đối đỉnh)

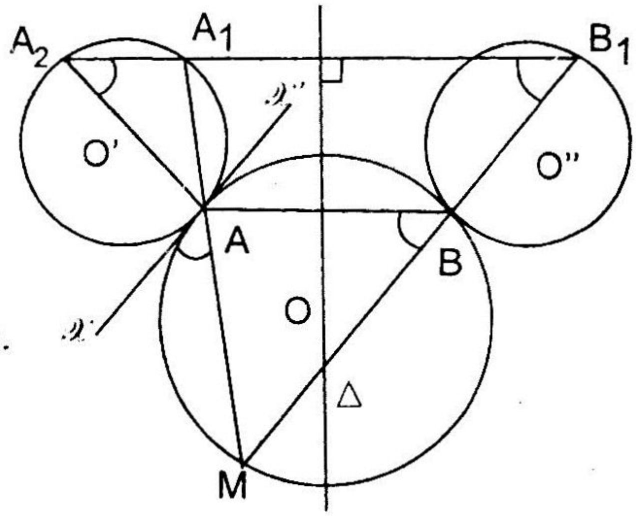
$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{AA_2A_1} \Rightarrow \widehat{AA_2B_1} = \widehat{A_2B_1B} \Rightarrow AA_2B_1B \text{ là hình thang cân.}$$

Gọi Δ là trung trực của AB. Xét phép đối xứng trục S_Δ, thì:

$$A_2 \xrightarrow{S_\Delta} B_1 \qquad (1)$$

Rõ ràng khi M chạy trên (O,R), thì A_2 chạy khắp trên (O',R').

Vì thế từ (1) suy ra quĩ tích của B_1 là ảnh của (O,R) qua phép đối xứng trục S_Δ.



Vì
$$\begin{aligned} O &\xrightarrow{S_\Delta} O\\ A &\longrightarrow B\\ O' &\longrightarrow O'' \end{aligned}$$

Nên quĩ tích của B_1 chính là đường tròn (O'',R') tiếp xúc với (O,R) tại B. Phần đảo xin dành cho bạn đọc.

Chương VII

PHÉP VỊ TỰ

§ I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho điểm O cố định và số thực $k \neq 0$ cho trước. Phép biến hình biến mỗi điểm M trên mặt phẳng, thành điểm M' theo quyluật.

$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$, được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

- Điểm O gọi là tâm vị tự (tâm ngoài nếu $k > 0$, tâm trong nếu $k < 0$), số k gọi là tỉ số vị tự.

- Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến M thành M' thường được kí hiệu như sau:

$$M \xrightarrow{H(O,k)} M'$$

- Do $k \neq 0$, nên từ: $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$,

tức là: $M \xrightarrow{H(O,k)} M' \quad \Leftrightarrow \quad M' \xrightarrow{H(O,\frac{1}{k})} M$

- Nếu $k = 1$, thì phép $H(0,1)$ là phép biến hình đồng nhất, tức là biến mỗi điểm thành chính nó.

- Nếu $k = -1$, thì phép $H(0,-1) = S_O = R(0, 180^0)$.

Ta có các tính chất đơn giản sau đây của phép vị tự:

1. Nếu $A \xrightarrow{H(O,k)} A'$

$M \xrightarrow{H(O,k)} M'$ thì: $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$

2. Phép vị tự biến ba điểm A, B, C thẳng hàng thành ba điểm A', B', C' thẳng hàng (nếu B nằm giữa AC, thì B' nằm giữa A'C').

***Từ đó suy ra**: Phép vị tự H (O,k) biến véc tơ $\overrightarrow{AM}$ thành véc tơ $k\overrightarrow{AM}$, đường thẳng thành đường thẳng cùng phương, đường thẳng qua O thành chính nó, tia thành tia cùng hướng (nếu $k > 0$) ngược hướng (nếu $k < 0$), đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng $A'B' = k\ AB$, $A'B' \parallel AB$, đa giác thành đa giác đồng dạng tỉ số k; đường tròn (O_1, R) thành đường tròn (O_2, $|k|\ R$), góc, miền góc thành hình bằng nó.*

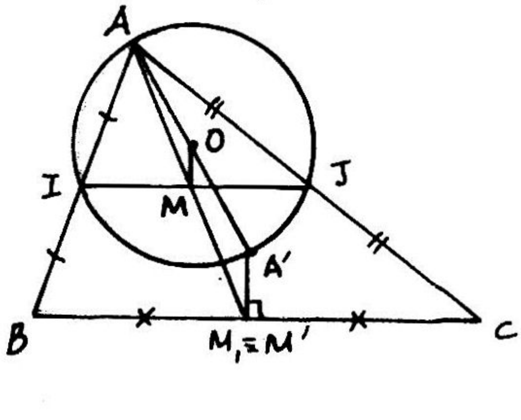
§ II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Gọi I, J, M theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và IJ. Đường tròn ngoại tiếp (tâm O) của ΔAIJ cắt AO tại A'. Gọi M' là chân đường vuông góc hạ từ A' xuống BC. Chứng minh A, M, M' thẳng hàng.

BÀI GIẢI

Gọi M_1 là trung điểm BC, ta có theo giả thiết:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \text{ và } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$$



Từ đó suy ra:

$$\Delta\ AIJ \xrightarrow{H(A,2)} \Delta\ ABC$$

Qua phép vị tự này, ta có:

$$O \xrightarrow{H(A,2)} A'$$

$$M \longrightarrow M_1$$

Vì phép vị tự bảo toàn góc, nên từ $OM \perp IJ \Rightarrow A'M_1 \perp BC$.

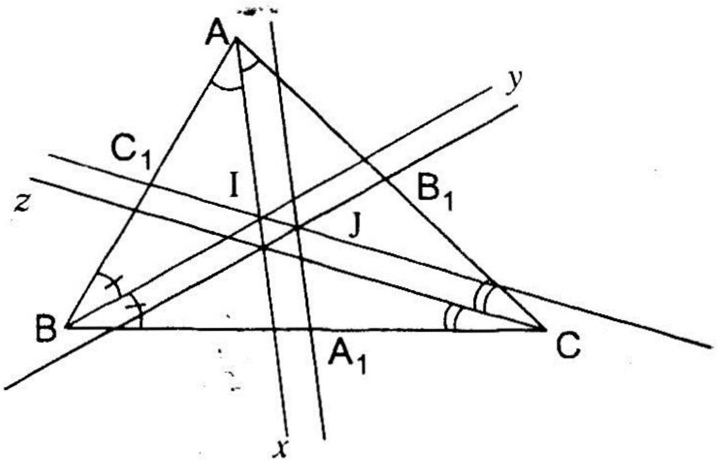
Như thế $M_1 \equiv M' \Rightarrow$ A, M, M' thẳng hàng (vì A, M, M_1 thẳng hàng), và đó là đ.p.c.m..

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của BC, CA, AB. Kẻ A_1x, B_1y, C_1z lần lượt song song với các đường phân giác trong của các góc A, B, C của Δ ABC.

Chứng minh A_1x, B_1y, C_1z đồng qui.

BÀI GIẢI

Xét phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ (G là trọng tâm Δ ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC).



Ta có: $AI \to A_1x$

$BI \to B_1y$

$CI \to C_1z$

$$I \to J\ \left(\frac{GJ}{GI} = -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow\ A_1x,\ B_1y,\ C_1z \text{ đồng qui tại } J.$$

Ví dụ 3. *(Đường tròn Euler).*

Chứng minh rằng các trung điểm các cạnh của một tam giác, chân các đường cao và các trung điểm các đoạn thẳng nối trực tâm với các đỉnh, cùng nằm trên một đường tròn.

BÀI GIẢI

Giả sử A_1, B_1, C_1 là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB;

A_2, B_2, C_2 là chân các đường cao kẻ từ A, B, C tương ứng

A_3, B_3, C_3 là trung điểm của HA, HB, HC; ở đây H là trực tâm tam giác.

Gọi M là trọng tâm, còn O là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ABC.

Xét phép vị tự $H(H, \frac{1}{2})$. Trong phép này thì:

$$A \xrightarrow{H(H,\ \frac{1}{2})} A_3$$

$$B \longrightarrow B_3$$

$$C \longrightarrow C_3$$

Do $OB_1 \perp AC$, $OA_1 \perp BC$, $OC_1 \perp AB$ (vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ABC, mà B_1, A_1, C_1 tương ứng là trung điểm các cạnh AC, BC, AB). $\Rightarrow OB_1 \perp A_1C_1$, $OA_1 \perp B_1C_1$ và $OC_1 \perp A_1B_1$, vậy O là trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$. Giả sử :

$$O \xrightarrow{H(H,\ \frac{1}{2})} O_1$$

tức là: $\overrightarrow{HO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ (1)

Theo chương 1 suy ra trong Δ ABC, thì tâm đường tròn ngoại tiếp O, trọng tâm M, trực tâm H thẳng hàng và:

$$\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO} \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}$ (do $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{MO_1}$) (3)

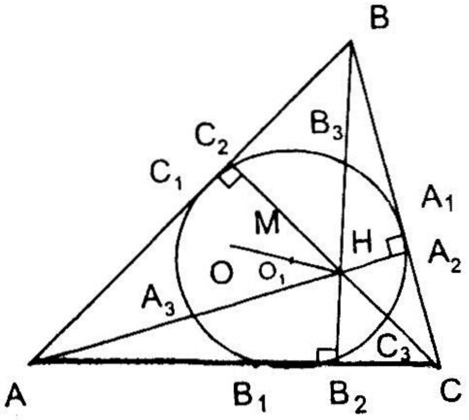
Trong $\Delta A_1B_1C_1$ có O là trực tâm, M là trọng tâm vậy từ (3) suy ra O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$.

Theo trên $\Delta ABC \xrightarrow{H(H,\ \frac{1}{2})} \Delta A_3B_3C_3$ vậy đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \xrightarrow{H(H,\ \frac{1}{2})}$ đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_3B_3C_3$ (4)

Vì: $O \xrightarrow{H(H,\ \frac{1}{2})} O_1$, mà O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \xrightarrow{H(H,\ \frac{1}{2})}$ đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ (5)

Từ (4) (5) suy ra sáu điểm A_3, B_3, C_3, A_1, B_1, C_1 cùng nằm trên một đường tròn.

Do B_3C_3 // BC, B_3A_3 // BA và A_3C_3 // AC ⇒ H cũng là trực tâm của $\Delta A_3B_3C_3$. Rõ ràng A_2, B_2, C_2 tương ứng là điểm đối xứng của H qua B_3C_3, A_3C_3, A_3B_3, vậy theo ví dụ 9', 9'' suy ra A_2, B_2, C_3 nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_3B_3C_3$. ⇒ 9 điểm A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, cùng nằm trên 1 đường tròn ⇒ đ.p.c.m..



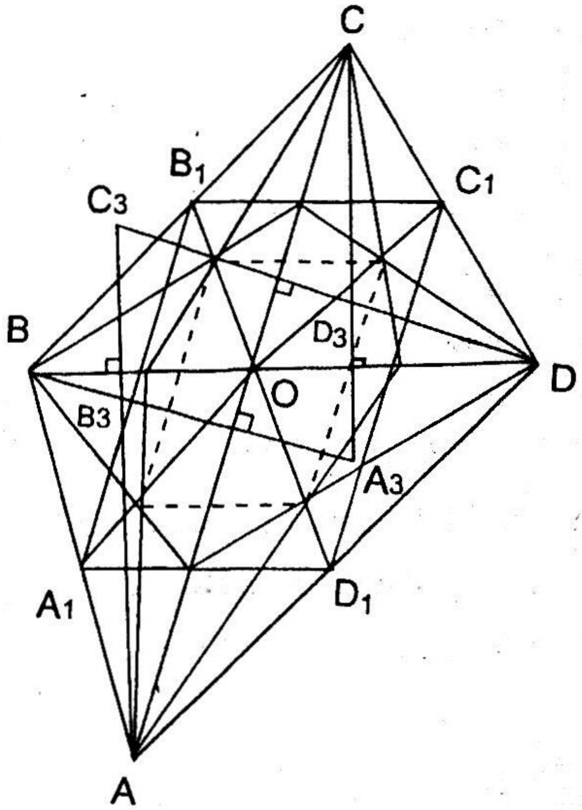
Chú ý: Đường tròn trên gọi là đường tròn Euler 9 điểm.

Ví dụ 4. Một tứ giác lồi được chia bởi các đường chéo thành 4 tam giác. Chứng minh rằng đường thẳng nối các trọng tâm của hai tam giác đối nhau vuông góc với đường thẳng nối các trực tâm của hai tam giác còn lại.

BÀI GIẢI

Giả sử A_1, B_1, C_1, D_1 là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác ABCD, O là giao điểm của các đường chéo AC và BD, A_2, B_2, C_2, D_2 là trọng tâm của các tam giác ABO, BCO, CDO, DAO; A_3, B_3, C_3, D_3 là trực tâm của các tam giác BCO, ABO, ADO, CDO.

Tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành, hơn nữa $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.



Rõ ràng $\overrightarrow{OA_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OD_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OD_1}$, do đó hình bình hành $A_2B_2C_2D_2$ vị tự với hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$.

Để giải bài toán ta chỉ cần chứng minh rằng qua phép quay 90^0, hình bình hành $A_3B_3C_3D_3$ biến thành hình bình hành vị tự với hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$.

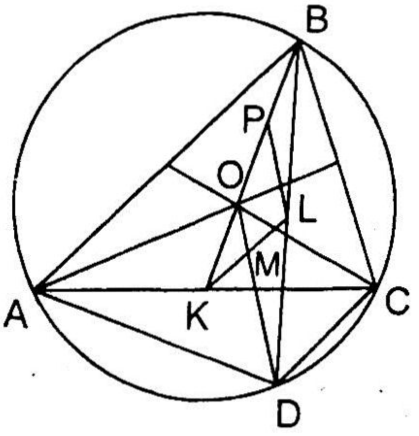
Bởi vì $A_3B_3 \perp A_1B_1$ và $B_3C_3 \perp B_1C_1$, nên qua phép quay 90^0 hình bình hành $A_3B_3C_3D_3$ biến thành hình bình hành có các cạnh song song với các cạnh của hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Còn lại ta phải chứng minh rằng $A_1B_1 : A_3B_3 = B_1C_1 : B_3C_3$, tức là $AC : A_3B_3 = BD : B_3C_3$. Khoảng các giữa đường thẳng A_3D_3 và B_3C_3 bằng AC. cosα, trong đó α là góc giữa các đường chéo AC và BD. Do đó: $A_3B_3 = AC.\ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Tương tự: $B_3C_3 = BD.\ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Suy ra : $\frac{AC}{A_3B_3} = \frac{BD}{B_3C_3} = \text{tg}\alpha$.

Ví dụ 5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh rằng các trọng tâm của các tam giác ABC, CDA, BCD, DAB cùng nằm trên một đường tròn.

BÀI GIẢI

Gọi K và L là trung điểm của các đường chéo AC và BD. Giả sử M là trung điểm của KL. Gọi O là trọng tâm Δ ABC, còn P là trung điểm của BO. Dễ thấy PL là đường trung bình trong tam giác OBD ⇒ PL // OD.



Theo tính chất của trọng tâm O, ta có PO = OK, mà PL // OD, vậy OD đi qua trung điểm M của KL. Do OM là đường trung bình trong ΔPKL, nên $\frac{OM}{PL} = \frac{1}{2}$.

và lại từ: $\frac{PL}{OD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OM}{OD} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MD} \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra: $D \xrightarrow{H(M,\,-\frac{1}{3})} O$ (2)

(2) chứng tỏ rằng trọng tâm O của Δ ABC là ảnh của D trong phép H $(M, -\frac{1}{3})$. Lý luận tương tự với trọng tâm của các Δ CDA, BCD, DAB. Như thế tứ giác tạo thành bởi 4 trọng tâm ấy là ảnh của tứ giác ABCD qua phép H $(M, -\frac{1}{3})$, mà ABCD là tứ giác nội tiếp, nên suy ra đ.p.c.m..

Ví dụ 6. Cho ba đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3), đôi một tiếp xúc ngoài tại A, B, C. Dây AC kéo dài của (O_1, R_1) gặp lại (O_3, R_3) tại A_1; A_1A_2 là đường kính của (O_3, R_3).

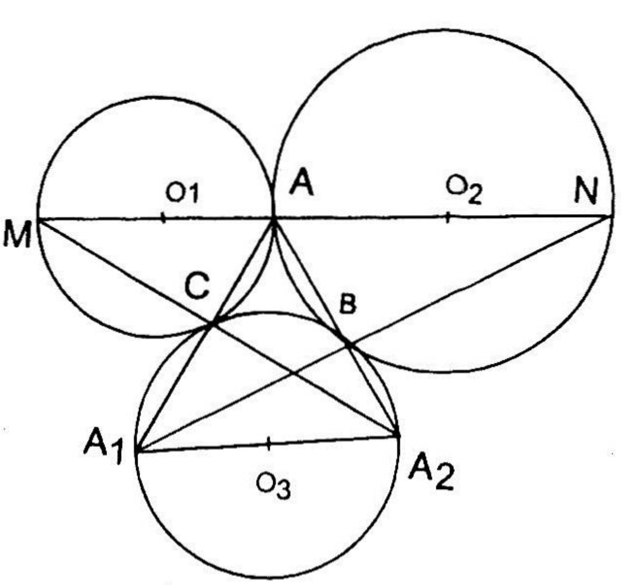
Chứng minh: A, B, A_2 thẳng hàng.

BÀI GIẢI

* Xét phép vị tự tâm C, tỉ số $-\frac{R_1}{R_3}$ ta có:

$$A_1 \to A,\ A \to M,\ \overrightarrow{A_1A_2} \to \overrightarrow{AM}$$

Vậy: $\overrightarrow{AM} = -\frac{R_1}{R_3}\overrightarrow{A_1A_2}$



* Xét phép vị tự tâm A tỉ số $-\frac{R_2}{R_1}$ ta có:

$$M \to N,\ \overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{AN}.$$

Vậy: $\overrightarrow{AN} = -\frac{R_2}{R_1}\overrightarrow{AM}$

* Xét phép vị tự tâm B tỉ số $-\frac{R_3}{R_2}$ ta có:

$$A \to B_2,\ N \to B_1,\ \overrightarrow{AN} \to \overrightarrow{B_2B_1}$$

Vậy: $\overrightarrow{B_2B_1} = -\frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{B_2B_1} = (-\frac{R_3}{R_2})(-\frac{R_2}{R_1})(-\frac{R_1}{R_3})\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{A_1A_2}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_1A_2} \qquad (*)$

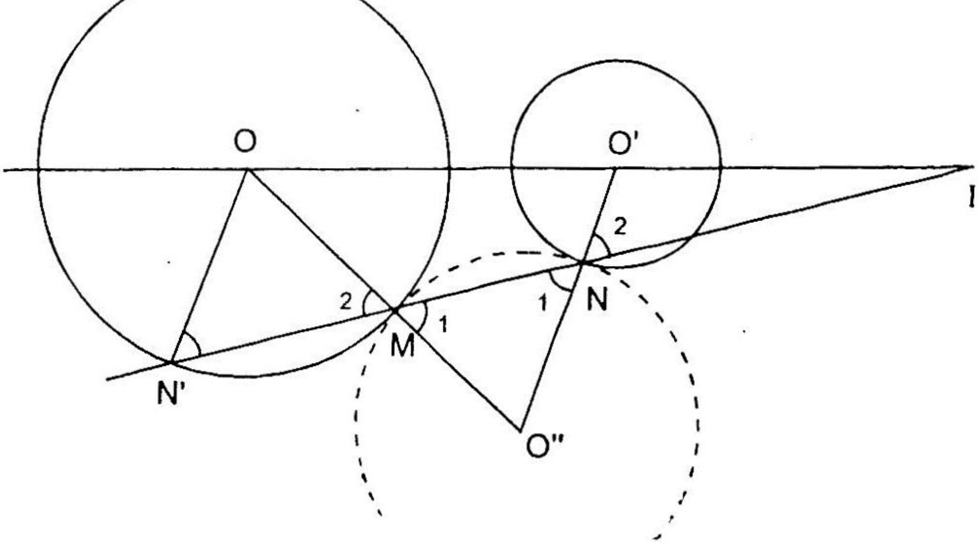
Do B_1B_2 và A_1A_2 đều là dây cung của (O_3, R_3), nên từ (*), ta có $B_1 \equiv A_1$, $B_2 \equiv A_2$, ở đây B_2 là ảnh của A cho bởi phép H $(B, -\frac{R_3}{R_2})$. Do A, B, B_2 thẳng hàng ⇒ A, B, A_2 thẳng hàng ⇒ đ.p.c.m..

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với R > R'. Một đường tròn di động (O", R") luôn luôn tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên tại M và N.

Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI GIẢI

Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại N' (khác M), và cắt đường nối tâm OO' tại I. Ta có:



$$\begin{cases} \widehat{N} = \widehat{M_2} & \text{(do } \Delta OM'N' \text{ cân ở O)} \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} & \text{(đối đỉnh)} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{N_1} & \text{(do } \Delta O''MN \text{ cân ở O'')} \\ \widehat{N_1} = \widehat{N_2} & \text{(đối đỉnh)} \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\widehat{N'} = \widehat{N_2} \Rightarrow ON' // O'N$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O'N} = \frac{R'}{R} . \overrightarrow{ON'}$$

Điều này chứng tỏ rằng $\overrightarrow{O'N}$ là ảnh của $\overrightarrow{ON'}$ trong phép vị tự biến đường tròn (O, R) thành đường tròn (O', R').

Mặt khác ta lại có:

$$ON' // O'N \Rightarrow \frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \overrightarrow{IO'} = \frac{R'}{R} . \overrightarrow{IO}$$

Như vậy I là chính là tâm vị tự nói trên (còn tỷ số vị tự là $\frac{R'}{R}$) nên I cố định.

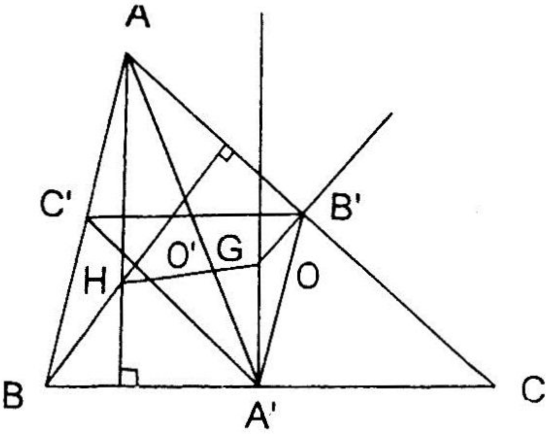
***Kết luận**: Đường thẳng MN luôn luôn đi qua điểm cố định I, tâm vị tự dương biến (O, R) thành (O', R').*

Ví dụ 8. *(Đường thẳng Euler).*

Cho tam giác ABC, Gọi O, H, G tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của Δ ABC. Chứng minh G, O, H thẳng hàng.

BÀI GIẢI

Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, CB. Theo tính chất của trọng tâm G, ta có:



$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

$$\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$

Vậy: $$\Delta\, ABC \xrightarrow{H(G,\, -\frac{1}{2})} \Delta\, A'B'C' \qquad (1)$$

Do H là trực tâm của Δ ABC, còn dễ dàng thấy rằng O là trực tâm của Δ A'B'C', vậy theo tính chất của phép vị tự, từ (1) suy ra:

$$H \xrightarrow{H(G,\, -\frac{1}{2})} O$$

Điều đó có nghĩa là $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ (2)

Đẳng thức (2) chứng tỏ rằng ba điểm G, O, H thẳng hàng

⇒ đ.p.c.m..

Chú ý: *1/ Đường thẳng nối H, O, G gọi là đường thẳng Euler.*

2/ Nếu gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ A'B'C', thì từ (1) suy ra: $$O \xrightarrow{H(G,\, -\frac{1}{2})} O'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \Rightarrow G, O, O' \text{ thẳng hàng.}$$

Như vậy ta còn có một kết quả mạnh hơn là **"Bốn điểm G, O, H, O' thẳng hàng".**

3/ Trong chương 1. ví dụ 2 (trang 10) ta đã giải bài tập trên bằng phương pháp véc tơ thuần tuý.

Ví dụ 9. Mỗi điểm của mặt phẳng đều được tô hoặc xanh, hoặc đỏ một cách hú họa. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác ABC với trọng tâm G sao cho A, B, C, G được tô cùng một màu.

BÀI GIẢI

Trước hết luôn tìm được một tam giác ABC với ba đỉnh cùng màu (vì nếu không tồn tại tam giác nào như thế, có nghĩa là mọi điểm đã phải nằm trên một đường thẳng, và cũng như vậy với mọi điểm xanh. Điều ấy trái với giả thiết mọi điểm của mặt phẳng đều được tô màu, do hai đường thẳng không lấp đầy được mặt phẳng).

Không giảm tổng quát, giả sử màu của ba đỉnh A, B, C đều xanh. Nếu trọng tâm G của Δ ABC cũng màu xanh, thì ABC là tam giác cần tìm, vì thế giả sử G có màu đỏ.

Xét phép vị tự H (G, 4). Giả sử trong phép vị tự ấy thì:

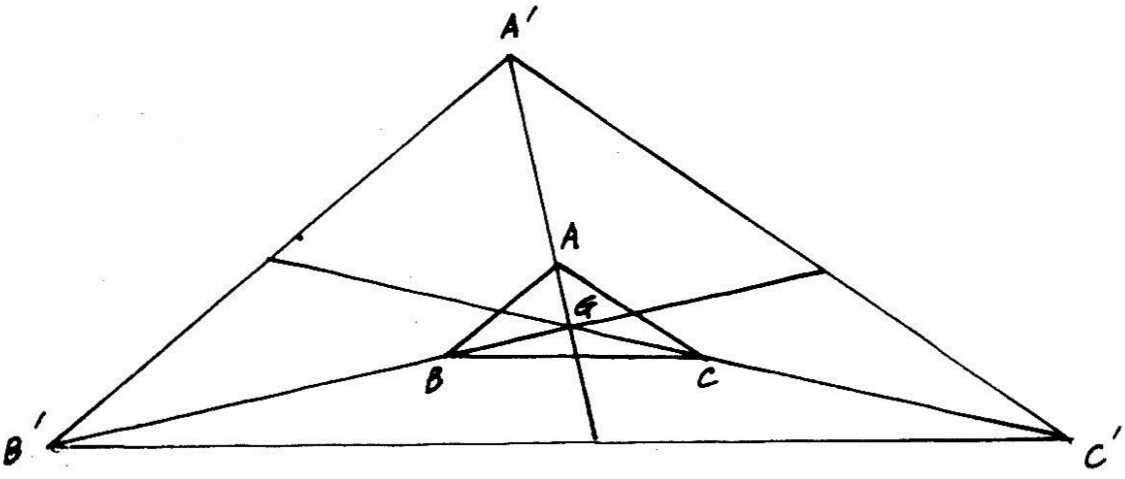
$$A \xrightarrow{H(G,\ 4)} A'$$

$$B \longrightarrow B'$$

$$C \longrightarrow C'$$

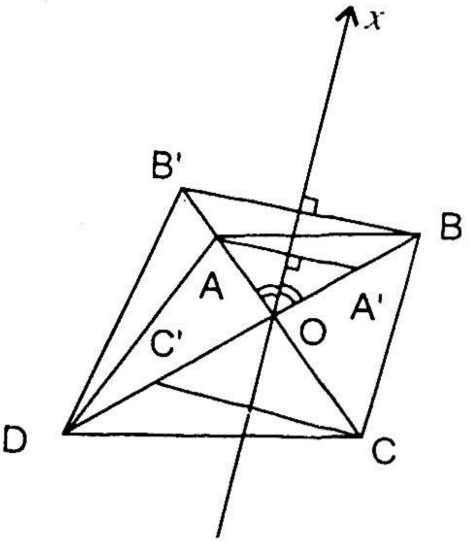
Nếu A', B', C' cùng có màu đỏ thì A'B'C' là Δ cần tìm. Vì thế chỉ cần xét khi một trong chúng là xanh, giả sử chẳng hạn A' có màu xanh.

Xét tam giác A'BC. Rõ ràng tam giác này nhận A làm trọng tâm. Vì A, B, C, A' cùng có màu xanh ⇒ A'BC là tam giác cần tìm và đó là đ.p.c.m..



Ví dụ 10. Cho hình thang ABCD (AB // CD), với $AC \cap BD = O$. Kẻ phân giác Ox của $\widehat{AOB}$. Gọi A', B' lần lượt là điểm đối xứng với A, B đối với Ox. Chứng minh rằng: $\widehat{ACA'} = \widehat{BDB'}$.

BÀI GIẢI



Đặt $\frac{OB}{OA} = k$, khi đó theo định lí Talét có: $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA} = k$.

Xét phép đối xứng trục S_{Ox} , ta có:

$$A \xrightarrow{S_{Ox}} A'$$

$$B \longrightarrow B'$$

$$C \longrightarrow C'$$

$$\Rightarrow \quad OA = OA',\ OB = OB' \text{ và } OC = OC'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{OB'}{OA} = k\ ;\ \frac{OD}{OC'} = k\ ;\ \frac{OB}{OA'} = k\ . \qquad (1)$$

Xét phép biến hình $F = H(O, k).S_{Ox}$. Ta có từ (1) :

$$A \xrightarrow{S_{Ox}} A' \xrightarrow{H(O,\,k)} B, \quad \text{vậy} \quad A \xrightarrow{F} B \qquad (2)$$

$$C \xrightarrow{S_{Ox}} C' \xrightarrow{H(O,\,k)} D, \quad \text{vậy} \quad C \xrightarrow{F} D \qquad (3)$$

$$A' \xrightarrow{SOxx} A \xrightarrow{H(O,\,k)} B', \quad \text{vậy} \quad A' \xrightarrow{F} B' \qquad (4)$$

Từ (2) (3) (4) suy ra $\widehat{ACA'} \xrightarrow{F} \widehat{BDB'}$ (5)

Vì F là tích của phép đối xứng trục và phép vị tự, nên nó bảo toàn độ lớn của góc, vì thế từ (5) suy ra: $\widehat{ACA'} = \widehat{BDB'} \Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 11. Cho tứ giác ABCD, trong đó đường tròn đường kính AD tiếp xúc với BC tại M; đường tròn đường kính BC tiếp xúc với AD tại N. Chứng minh rằng: AB // DC.

BÀI GIẢI

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu AD // BC ⇒ hai đường tròn đang xét cùng có bán kính bằng khoảng cách giữa AD, BC, nên bằng nhau ⇒ AD = BC ⇒ ABCD là hình bình hành ⇒ AB // DC ⇒ đ.p.c.m..

2. Nếu $AD \cap BC = I$. Gọi O, O' tương ứng là trung điểm của AD, BC.

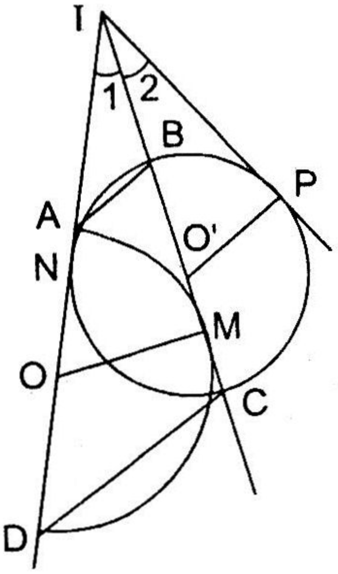
Xét phép đối xứng trục $S_{IO'}$ và giả sử trong phép này thì: $N \longrightarrow P$

$\Rightarrow \widehat{INO'} = \widehat{IPO'} = 90^0$ và $\widehat{NIO'} = \widehat{O'IP}$

$\Rightarrow \Delta\, IPO \sim \Delta\, IMO$.

Đặt $k = \dfrac{IO}{IO'}$ và $\alpha = \widehat{PIO'} = \widehat{NIO'}$ (1)

Xét phép biến hình: $F = H(I, k).\ R^{-}(I,\alpha)$



Từ (1) suy ra: $O' \xrightarrow{F} O$ (2)

$P \longrightarrow M$ (3). (Chú ý là do $\dfrac{OM}{OP} = k$).

Vậy: $(O', O'P) \xrightarrow{F} (O, OM)$

và $IO' \longrightarrow IO$

Vì B, C $\in$ (O', O'P) và B, C $\in$ tia IO' nên ảnh của B, C qua phép biến đổi F phải thuộc (O, OM) và thuộc tia IO'.

$\Rightarrow$ $B \xrightarrow{F} A$

$C \longrightarrow D$

Từ đó suy ra IA = k IB và ID = k IC $\Rightarrow \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{IB}{IC}$ nên theo định lí Talét đảo suy ra: AB // DC $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC và O là tâm đường tròn nội tiếp, M và N là các tiếp điểm của các cạnh AB, BC với đường tròn ấy. Gọi P là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AO. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

BÀI GIẢI

Giả sử MN $\cap$ AO = P'. Do O là tâm đường tròn nội tiếp, nên

$$\widehat{P'OC} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} = \frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{B}{2} = \frac{180^0 - B}{2} \qquad (1)$$

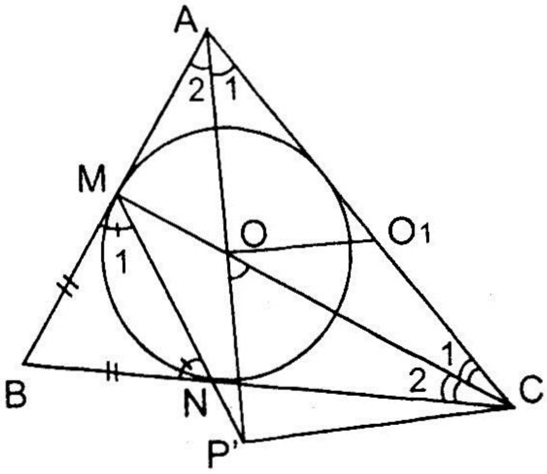
Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có BM = BN

$$\Rightarrow \widehat{BMN} = \frac{180^0 - B}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\widehat{AOC} = 180^0 - \widehat{P'OC} = 180^0 - \widehat{BMN} = \widehat{AMP'}$

Do $\widehat{AOC} = \widehat{AMP'}$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (vì O là tâm đường tròn nội tiếp nên OA là phân giác góc A) $\Rightarrow \Delta AOC \sim \Delta AMP'$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OM} = \frac{AC}{AP'} \qquad (3)$$



Đặt $k = \frac{OA}{OM} \left(= \frac{AC}{AP'} \right)$

Xét phép biến hình tích sau đây:

$$H(A, k).\ R^{+}\left(A, \frac{A}{2}\right) = \mathscr{P}$$

Nó là tích của một phép quay với một phép vị tự, nên đó là phép đồng dạng.

Theo (3) suy ra: $M \xrightarrow{\mathscr{P}} O$

$P' \longrightarrow C$

$A \longrightarrow A$

$O \longrightarrow O_1$

Chú ý là $O_1 \in AC$ và ta có: $\frac{AO_1}{AO} = k \Rightarrow \frac{AO_1}{AO} = \frac{AC}{AP'} \Rightarrow OO_1 \,//\, CP'$

Từ đó suy ra: $AM \xrightarrow{\mathscr{P}} AO$

$OM \longrightarrow O_1O$

Vì $AM \perp OM$, mà phép $\mathscr{P}$ là phép đồng dạng nên bảo toàn góc $\Rightarrow AO \perp O_1O$, lại do $OO_1 \,//\, CP' \Rightarrow CP' \perp AO$.

Như thế $P \equiv P'$, hay M, N, P thẳng hàng $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC. Kẻ các hình chữ nhật ACMN, CBPQ sao cho M, B nằm khác phía đối với AC; P, A nằm khác phía đối với CB và $\Delta ACM \sim \Delta CBP$. Giả thiết $AP \cap BN = H$.

Chứng minh rằng $H \in CC_1$, ở đây CC_1 là đường cao kẻ từ C trong Δ ABC.

BÀI GIẢI

Kẻ $BI \perp CP$. Đặt $k = \dfrac{IC}{IB}$ (1)

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông BPC, ta có:

$$IC \,.\, IP = IB^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{IC}{IB} = \frac{IB}{IP} \quad \Rightarrow \quad \frac{IB}{IP} = k \qquad (2)$$

Xét phép biến hình tích $\mathcal{F}$ xác định là tích của hai phép quay và vị tự như sau $\mathcal{F} = H\,(I, k).\ R^{-}\,(I, 90^0)$

Rõ ràng $\mathcal{F}$ là phép biến hình đồng dạng. Từ (1), (2) suy ra

$$B \xrightarrow{\mathcal{F}} C$$

$$P \longrightarrow B$$

như vậy $\overrightarrow{PB} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overrightarrow{CB}$ (3)

Trên tia đối của tia CC_1 lấy điểm R sao cho:

$$CR = k\ AB \qquad (4)$$

Vì $B \xrightarrow{\mathcal{F}} C$

mà $BA \perp CR$ và $CR = k\ AB$ nên

$$\overrightarrow{BA} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overrightarrow{CR}$$

$\Rightarrow \qquad A \xrightarrow{\mathscr{F}} R \qquad (5)$

Vậy: $\qquad AB \xrightarrow{\mathscr{F}} RC \qquad (6)$

Vì: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ nên:

$$\mathscr{F}(\overrightarrow{AP}) = \mathscr{F}(\overrightarrow{AB}) + \mathscr{F}(\overrightarrow{BP})$$

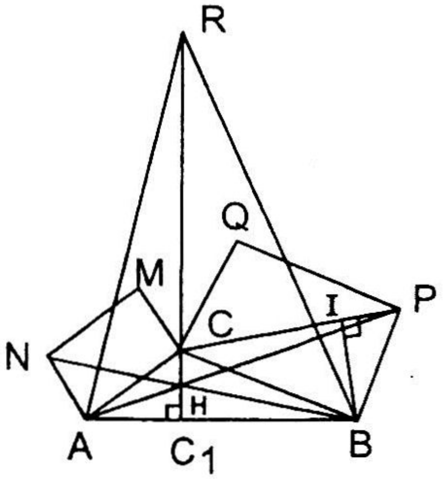
$$\Rightarrow \quad \mathscr{F}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{RB}$$

Vì $\qquad \overrightarrow{AP} \xrightarrow{\mathscr{F}} \overrightarrow{RB}$

Mà $\mathscr{F} = H(I, k).\ R^{-}(I, 90^0)$

$$\Rightarrow \qquad AP \perp RB \qquad (7)$$

Lý luận tương tự có: $BN \perp AR \qquad (8)$



Từ (7) (8) suy ra giao điểm H của AP và BN là trực tâm của Δ RAB. Vì RC ⊥ AB, nên H nằm trên đường thẳng RC. Hơn thế hai đường thẳng CC_1, RC trùng nhau vì hai tia CR, CC_1 đến nhau ⇒ đ.p.c.m..

Ví dụ 14. 1/ Cho hai phép vị tự cùng tâm $H(O, k_1)$ và $H(O, k_2)$ với $k_1k_2 \neq 1$. Chứng minh rằng phép biến hình tích :

$\mathscr{F} = H(O, k_2).\ H(O, k_1)$ cũng là phép vị tự.

2/ Cho hai phép vị tự khác tâm $H(O_1, k_1)$ và $H(O_2, k_2)$, với $k_1k_2 \neq 1$. Chứng minh rằng phép biến hình tích

$\mathscr{F} = H(O_2, k_2).\ H(O_1, k_1)$ cũng là phép vị tự. Gọi O là tâm của phép vị tự này. Chứng minh rằng: O, O_1, O_2 thẳng hàng.

BÀI GIẢI

1/ Lấy **M** là điểm tuỳ ý, ta có

$$M \xrightarrow{H(O,\, k_1)} M' \qquad (1)$$

$$M' \xrightarrow{H(O,\, k_2)} M'' \qquad (2)$$

vậy $$M \xrightarrow{H(O,\, k_2).\, H(O,\, k_1)} M'' \qquad (3)$$

Từ (1) có: $\overrightarrow{OM'} = k_1 \overrightarrow{OM}$ (4)

Từ (2) có: $\overrightarrow{OM''} = k_2 \overrightarrow{OM'}$ (5)

Từ (4) (5) suy ra: $\overrightarrow{OM''} = k_1k_2 \overrightarrow{OM}$ (6)

Đẳng thức (6) đúng ∀ M, vậy theo định nghĩa suy ra:

$$M' \xrightarrow{H(O, k_1k_2)} M''$$

Vậy phép biến hình $\mathscr{F} = H(O,\, k_2).\, H(O,\, k_1)$ là phép vị tự tâm O, tỉ số vị tự là k_1k_2 .

Xét hai điểm bất kì A, B, ta có:

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{H(O_1,\, k_1)} \overrightarrow{A'B'} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{A'B'} \xrightarrow{H(O_2,\, k_2)} \overrightarrow{A''B''} \qquad (2)$$

vậy $$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{H(O,\, k_2).\, H(O,\, k_1)} \overrightarrow{A''B''} \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra: $\overrightarrow{A'B'} = k_1 \overrightarrow{AB}$ (4)

$\overrightarrow{A''B''} = k_2 \overrightarrow{A'B'}$ (5)

Từ (4) (5) suy ra: $\overrightarrow{A''B''} = k_1k_2 \overrightarrow{AB}$ (6)

Do $k_1k_2 \neq 1$, nên vì (6) đúng ∀ A, B suy ra phép biến hình tích $\mathscr{F} = H(O_2,\, k_2).\, H(O_1,\, k_1)$ cũng là phép vị tự.

Bây giờ gọi O là tâm của phép vị tự này. Đường thẳng O_1O_2 biến thành chính nó qua phép H (O_1, k_1), cũng như phép H (O_2, k_2), vì thế đường thẳng O_1O_2 biến thành chính nó qua phép biến hình $\mathscr{F}$.

Giả sử: $O \xrightarrow{H\,(O_1,\,k_1)} O'$

khi đó ta có: $\overrightarrow{O_1O'} = k_1\,\overrightarrow{O_1O}$ (7)

Giả sử $O' \xrightarrow{H\,(O_2,\,k_2)} O''$

khi đó ta có: $\overrightarrow{O_2O''} = k_2\,\overrightarrow{O_2O'}$ (8)

Do $O \xrightarrow{H\,(O,\,k_2).\,H\,(O,\,k_1)} O''$

nhưng vì O là tâm của phép vị tự H (O, k_2). H (O, k_1), nên O'' = O

Vậy (8) có dạng: $\overrightarrow{O_2O} = k_2\,\overrightarrow{O_2O'}$ (9)

Do: $\overrightarrow{O_2O} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O'}$

Vậy từ (9) suy ra: $\overrightarrow{O_2O} = k_2\,(\,\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O'}\,)$ (10)

Thay (7) vào (10) có $\overrightarrow{O_2O} = k_2\,(\,\overrightarrow{O_2O_1} + k_1\,\overrightarrow{O_1O}\,)$

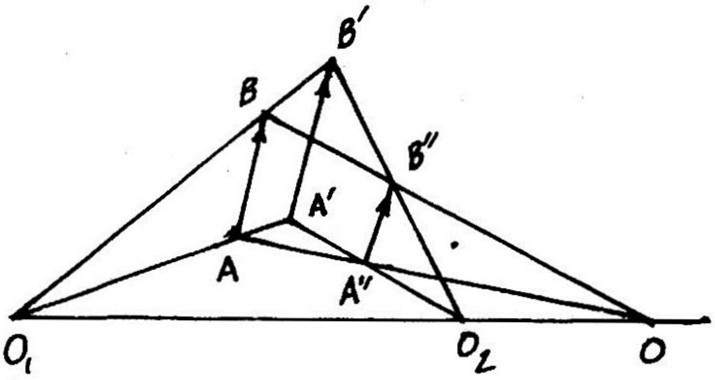
hay $\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O} = k_2\,\overrightarrow{O_2O_1} + k_2 k_1\,\overrightarrow{O_1O}$

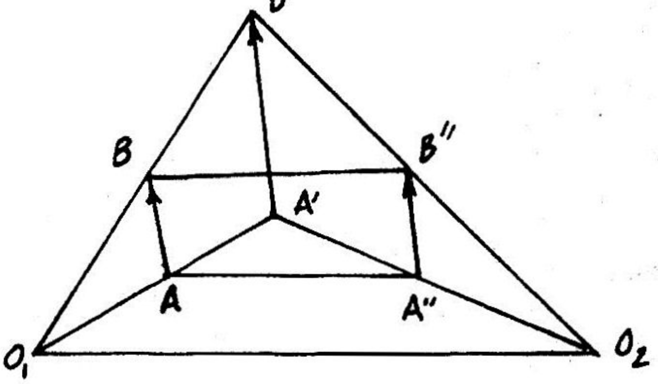
$\overrightarrow{O_1O}\,(1 - k_2 k_1) = \overrightarrow{O_1O_2}\,(1 - k_2)$

Do $k_1k_2 \neq 1$, nên suy ra

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{1 - k_2}{1 - k_2k_1}\,\overrightarrow{O_1O_2} \qquad (11)$$

Đẳng thức (11) chứng tỏ rằng O_1, O_2, O thẳng hàng. Đó là đ.p.c.m..





Chú ý: *Nếu $k_1k_2 = 1$, ta có $\overline{A''B''} = \overline{AB}$, vì thế:*

1/ Nếu $O_1 \neq O_2$ thì $\mathcal{F} = H(O_2, k_2).H(O_1, k_1)$ là phép tịnh tiến.

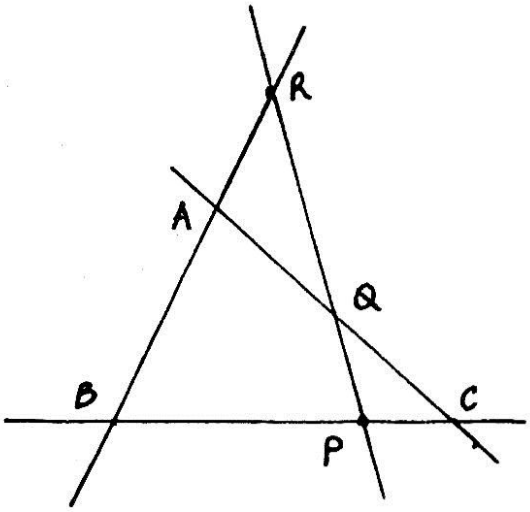
2/ Nếu $O_1 \equiv O_2$ thì $\mathcal{F}$ là phép biến đổi đồng nhất.

Ví dụ 15. *(Dùng phép vị tự chứng minh định lí Mênêlaúyt).*

Cho P, Q, R theo thứ tự trên ba cạnh BC, CA, AB của một tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} . \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} . \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ là điều kiện cần và đủ để P, Q, R thẳng hàng

BÀI GIẢI



Giả sử ba điểm P, Q, R thẳng hàng, ta có:

- B biến thành C bởi phép vị tự tâm P với tỉ số $k_1 = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$

- C biến thành A bởi phép vị tự tâm Q với tỉ số $k_2 = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$.

Tích của hai phép vị tự này biến B thành A.

Nếu tích $k_1 . k_2 = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} . \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = 1$ thì $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ và do đó PQ // AB là điều trái với giả thiết là PQ cắt AB tại R. Vậy tích $k_1 . k_2 \neq 1$ và ta có tích của hai phép vị tự nói trên là một phép vị tự có tâm nằm trên đường thẳng PQ và ba tâm vị tự này phải thẳng hàng và đồng thời tâm của tích này phải nằm trên đường thẳng AB (vì biến B thành A).

Vậy $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ là tỉ số của phép vị tự tâm R biến B thành A.

Do đó ta suy ra: $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$

Ngược lại giả sử ba điểm P, Q, R theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC thoả mãn hệ thức $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ ta cần chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Giả sử đường thẳng PQ cắt AB tại R' vì nếu không cắt thì PQ // AB và ta có $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$, khi đó ta suy ra $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ là điều vô lí.

Áp dụng phần thuận cho P, Q, R' thẳng hàng ta có:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = 1$$

So sánh với giả thiết của phần đảo suy ra $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} \Rightarrow R' \equiv R$

$\Rightarrow$ P, Q, R thẳng hàng $\Rightarrow$ đ.p.c.m..

Ví dụ 16. Cho hình thang ABCD có AB // CD và AD = a, DC = b, còn A và B là hai điểm cố định. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo:

1/ Tìm quĩ tích C khi D thay đổi.

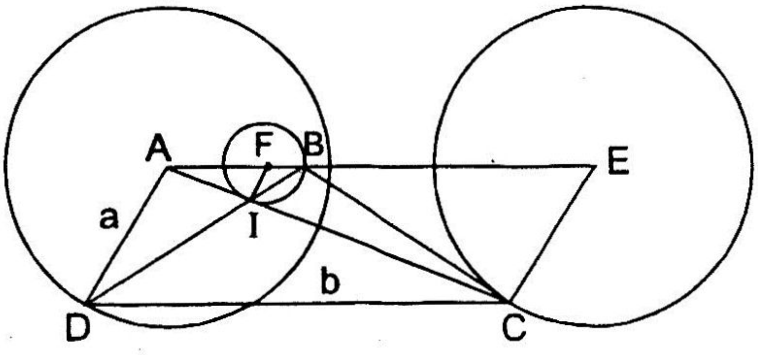
2/ Tìm quĩ tích I khi C và D thay đổi.

BÀI GIẢI

a) Điểm D chạy trên đường tròn (A, a) vectơ $\overrightarrow{DC}$ có phương chiều và môđun không đổi nên vectơ ấy không đổi. Vậy C là ảnh của D trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC} = k.\overrightarrow{AB}$ trong đó $|\overrightarrow{DC}|=b$.

Dựng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$. Vì D chạy trên đường tròn (A, a) nên C chạy trên đường tròn (E, a).

Đảo lại, lấy một điểm C tuỳ ý trên đường tròn (E, a) rồi dựng $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{BA}$.



Ta có ADCE là hình bình hành nên AD = EC = a và hình thang ABCD thoả mãn điều kiện của bài toán. Vậy tập hợp các điểm C là đường tròn (E, a) với $\overrightarrow{AE} = \dfrac{b}{AB}\overrightarrow{AB}$.

b) Đặt AB = m. Ta có: $\dfrac{AI}{IC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m}{b}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AI}{AI + IC} = \frac{m}{b + m} \text{ hay } \frac{AI}{IC} = \frac{m}{b + m}$$

Do đó $\overrightarrow{AI} = \dfrac{m}{b + m}\overrightarrow{AC}$.

Vậy I là ảnh của C trong phép vị tự tâm A tỉ số $k = \dfrac{m}{b + m}$.

Dựng IF // CE.

Đảo lại lấy một điểm I tuỳ ý trên đường tròn tâm F, ta chứng minh được I là giao điểm của hai đường chéo của hình thang ABCD được tạo nên. Ta có $\overrightarrow{AF} = \dfrac{b}{b + m}\overrightarrow{AB}$ và tập hợp các điểm I là đường tròn $\left(F, \dfrac{am}{b + m}\right)$.

Ví dụ 17. Cho đường thẳng d và một điểm A cách d một khoảng AH = a. Từ một điểm M bất kì trên d, vẽ P và P' sao cho:

$$M \xrightarrow{H(M,\, k).\, R^{+}(A,\, 90^0)} P$$

$$M \xrightarrow{H(M,\, \frac{1}{k}).\, R^{-}(A,\, 90^0)} P'$$

ở đây k > 0 cho trước.

Chứng minh rằng khi M vẽ đường thẳng d, thì hai điểm P và P' vẽ nên hai đường d' và d'' vuông góc với nhau, và đường tròn ngoại tiếp tam giác PAP' luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI GIẢI

Theo giả thiết $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{2}$ ta thấy tam giác APM vuông góc tại M. Đặt $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) = -\alpha$ ta có $\widehat{PAM} = \alpha$ và $tg\alpha = \frac{MP}{MA}$ mà theo giả thiết MP = k MA nên ta suy ra $tg\alpha = k$. Do đó α là một hằng số.

Mặt khác $\cos\alpha = \frac{AM}{AP}$, do đó $\frac{AP}{AM} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Vậy P là ảnh của M qua phép đồng dạng tâm A, tỉ số $k' = \frac{1}{\cos\alpha}$ và góc quay bằng $-\alpha$.

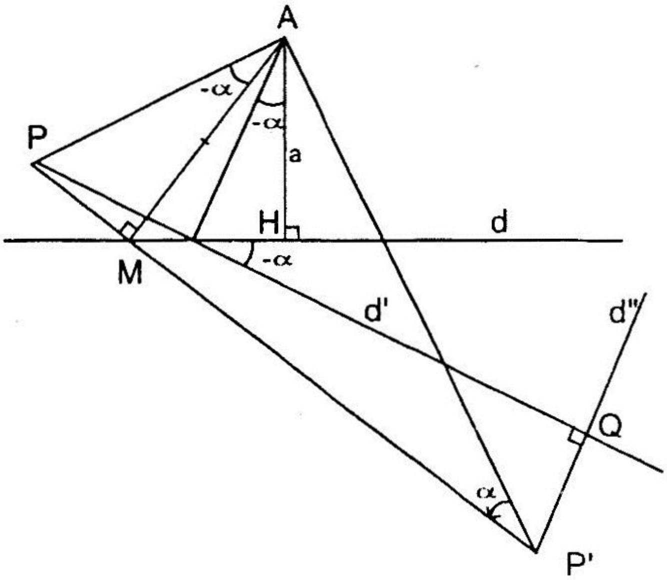
Vậy khi M vẽ nên đường thẳng d thì P vẽ nên đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng $(A, \frac{1}{\cos\alpha}, -\alpha)$ nói trên.

Đường thẳng d' là đường thẳng qua P và tạo với d một góc bằng $-\alpha$

Vì $MP' = \frac{1}{k}MA$ nên ta có $\frac{MA}{MP'} = k = tg\alpha$. Do đó $\widehat{AP'M} = \alpha$ và $\widehat{PAP'} = \frac{\pi}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có P' là ảnh của M qua phép đồng dạng tâm A, tỉ số $\frac{1}{\sin\alpha}$ và góc quay $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nên tập hợp các điểm P' là đường thẳng d'' ảnh của đường thẳng d trong phép đồng dạng tâm A,

tỉ số $\frac{1}{\sin\alpha}$, góc quay $\frac{\pi}{2} - \alpha$.



Đường thẳng d'' này tạo với d một góc bằng $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ta có $(d', d'') = (d', d) + (d, d'') = \alpha + (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$.

Vậy d'' ⊥ d' tại Q. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APP' nhận PP' làm đường kính luôn luôn đi qua điểm Q cố định.

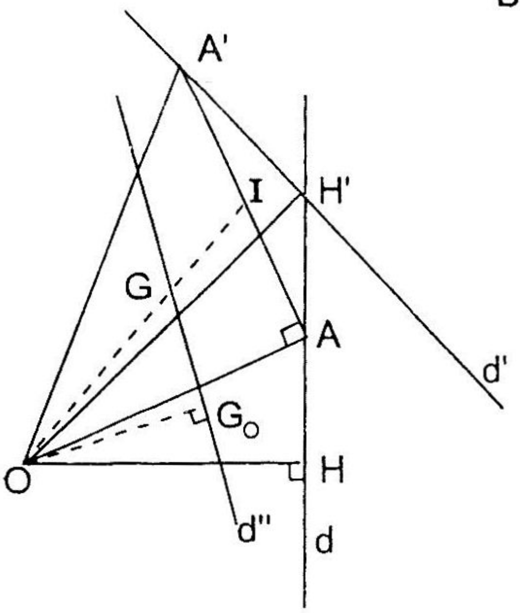
Ví dụ 18. Cho d là một đường thẳng cố định và O là một điểm cố định ∉ d, A là một điểm di động trên d. Giả sử:

$$A \xrightarrow{H(O,\ \sqrt{2}).\ R^{+}(O,\ \frac{\pi}{4})} A'$$

1/ Tìm quĩ tích A'.

2/ Gọi G là trọng tâm của tam giác OAA'. Tìm quĩ tích G.

BÀI GIẢI



1. Vậy A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay $\alpha = \frac{\pi}{4}$ và sau đó thực hiện phép vị tự tâm O với tỉ số $k = \sqrt{2}$. Ta có $OA' = \sqrt{2}\, OA_1$. Gọi f là tích của phép vị tự $H(O, \sqrt{2})$ và phép quay $R^+(O, \frac{\pi}{4})$ ta có f là phép đồng dạng.

Vậy tập hợp các điểm A' là ảnh của A qua phép đồng dạng f mà các điểm A chạy trên đường thẳng d nên tập hợp các điểm A' chạy trên đường thẳng d' = f (d). Để dựng d' ta vẽ OH ⊥ d tại H. Dựng tam giác OHH' đồng dạng với tam giác OAA'. Đường thẳng d' vuông góc với OH' tại H'.

2. Điểm G là trọng tâm của tam giác OAA' nên ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$ với I là trung điểm của cạnh AA'. Gọi $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$ ta có $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Vậy α không đổi.

Mặt khác $\frac{OG}{OA} = \frac{2/3\ OI}{OA} = \frac{2}{3\cos\alpha}$ mà $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Do đó $\frac{OG}{OA} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Vậy G là ảnh của A qua tích của một phép quay tâm O, góc quay α không đổi mà $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ và một phép vị tự tâm O với tỉ số vị tự $k = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Tích của hai phép này là phép đồng dạng g.

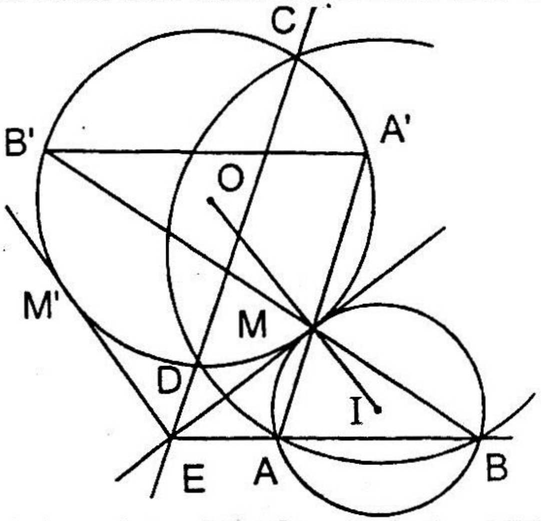
Vậy tập hợp các điểm G là đường thẳng d'' ảnh của d qua phép đồng dạng g nói trên.

Để dựng đường thẳng d'' ta tìm điểm G_O là trọng tâm của tam giác OHH'. Đường thẳng d vuông góc với OG_O tại G_O.

Ví dụ 19. Cho đường tròn (O) tâm O và M là điểm di động trên đường tròn ấy. Một đoạn thẳng AB ở bên ngoài (O), các tia MA, MB lần lượt cắt $(\mathscr{C})$ tại các điểm thứ hai A', B'. Dựng điểm M sao cho A'B' // AB.

BÀI GIẢI

Giả sử đã dựng được điểm M thoả mãn các điều kiện của đầu bài.



Đặt $k = \frac{MA}{MA'}$,

do A'B' // AB

nên $\frac{MB}{MB'} = \frac{MA}{MA'} = k$,

và H (M, -k) :

M → M; A' → A; B' → B.

Gọi (I) là ảnh của (O) trong phép vị tự H (O, -k) do (O) qua M, A', B' nên (I) qua M, A, B và H (M, -k) : O → I (hệ quả). Suy ra I, O, M thẳng hàng hay (I), (O) tiếp xúc với nhau tại M.

Cách dựng: dựng đường tròn tuỳ ý qua A, B cắt (O) tại hai điểm C, D, gọi E là giao điểm của CD, AB. Kẻ EM, EM' tiếp xúc với (O) tại M, M'. Ta có điểm M, M' cần dựng.

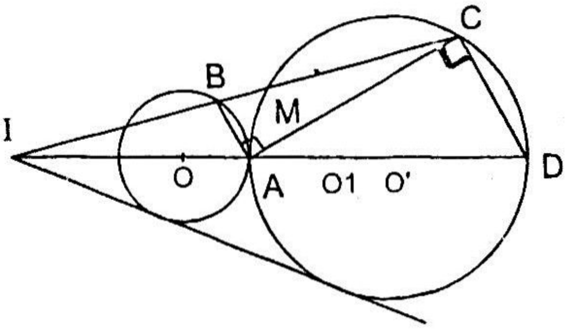
Chứng minh: Trước hết ta có đường tròn (I) qua A, B, M tiếp xúc với đường tròn (O) nên I, M, O thẳng hàng. Đặt $k = \frac{MO}{MI}$, ta có H (M, -k) : (I) → (O); A → A' ; B → B', và ta có A'B' // AB (với điểm M', cũng chứng minh tương tự).

Biện luận: Luôn luôn dựng được C, D. Nếu CD cắt AB tại E thì dựng được các tiếp tuyến EM, EM' của (O), nếu CD // AB thì các điểm M, M' cần tìm là giao điểm của (O) với trung trực của AB. Do đó, luôn luôn có hai nghiệm hình.

Ví dụ 20. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Kẻ các dây AB của (O) và AC của (O') sao cho $\widehat{BAC} = 90^0$, M là điểm chia trong BC theo tỉ số k.

Tìm quĩ tích điểm M.

BÀI GIẢI



Đặt $l = \frac{R'}{R}$. Lấy điểm I sao cho I chia ngoài O'O theo tỉ số l, ta có $H(I, l)$: O → O', (O) → (O'). Kẻ đường kính AD của (O') ta có $H(I, l)$: A → D. Ta lại có AB//DC (cùng ⊥ AC) nên $H(I, l)$: tia AB → tia DC, mà $B \in (O)$, $C \in (O')$ nên $H(I, l)$: B → C.

Vậy $\overrightarrow{IC} = l\overrightarrow{IB}$.

Từ giả thiết ta lại có:

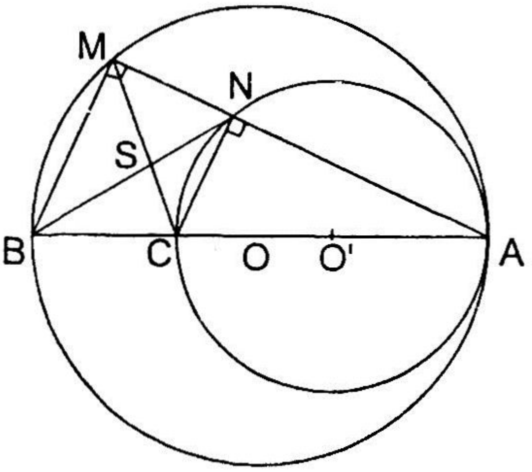
$\overrightarrow{IM} = \frac{k}{1+k}.\overrightarrow{IC} + \frac{1}{1+k}.\overrightarrow{IB} = \frac{k}{1+k}l.\overrightarrow{IB} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{IB} = \frac{1+l.k}{1+k}\overrightarrow{IB}$. Vậy M là ảnh của B trong phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{1+l.k}{1+k}$. Kẻ MO_1 // BA cắt OO' tại O_1, ta có tập hợp điểm M là đường tròn $(O_1, \frac{1+l.k}{1+k}.R)$ trong đó $l = \frac{R'}{R}$.

Ví dụ 21. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc trong tại A (R > R'). Đường kính qua A cắt (O, R) tại B và cắt (O',R') tại C. Một đường thẳng biến thiên qua A cắt (O, R) tại M và cắt (O', R') tại N. Gọi S = BN $\cap$ CM. Tìm quĩ tích của S.

BÀI GIẢI:

Ta có BM // CN. Hai tam giác BMS và NCS đồng dạng nên ta có:

$$\frac{\overline{CS}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{2R'}{2R} = \frac{R'}{R}$$



Do đó: $$\frac{\overline{CS}}{\overline{SM}+\overline{CS}} = \frac{R'}{R+R'}$$

hay $$\frac{\overline{CS}}{\overline{SM}} = \frac{R'}{R+R'}$$

$$\overrightarrow{CS} = \frac{R'}{R+R'} . \overrightarrow{CM}$$

Vậy tập hợp các điểm S là đường tròn vị tự của đường tròn tâm O trong phép vị tự tâm C tỉ số vị tự $k = \frac{R'}{R+R'}$.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC. Hãy tìm điểm E trên AB, F trên AC sao cho: BE = EF = FC.

BÀI GIẢI

Giả sử đã dựng được hai điểm E, F sao cho BE = EF = FC. Qua A kẻ đường thẳng song song với EF cắt tia BF tại M. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng BC tại N. Ta có:

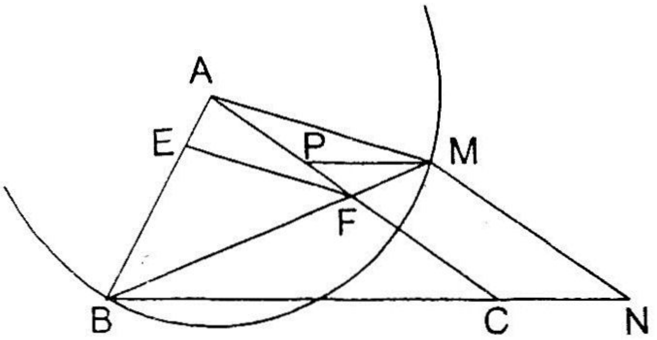
$$\frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AM} = \frac{BF}{BM} = \frac{FC}{MN} = \frac{BC}{BN} = k$$

Vì BE = EF = FC ta suy ra AB = AM = MN. Ta cần tìm điểm M, N sao cho N thuộc tia BC và MN // AC đồng thời thoả mãn điều kiện AB = AM = MN. Ta có cách dựng sau:

- Dựng đường tròn tâm A bán kính AB.

- Trên tia CA lấy CP = AB.

- Qua P dựng đường thẳng song song với BC cắt đường tròn tại M.



- BM cắt AC tại F.

- Qua F kẻ đường thẳng song song với AM cắt AB tại E.

Ta có tứ giác BEFC là hình vị tự của tứ giác BAMN trong phép vị tự tâm B với tỉ số vị tự $k = \frac{BE}{BA}$. Vì BA = AM = MN nên ta suy ra:

$$BE = EF = FC.$$

Ví dụ 23. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R'). Lấy A và A' tương ứng thuộc hai đường tròn ấy. Tìm phép đồng dạng biến (O, R) thành (O', R') và biến A thành A'.

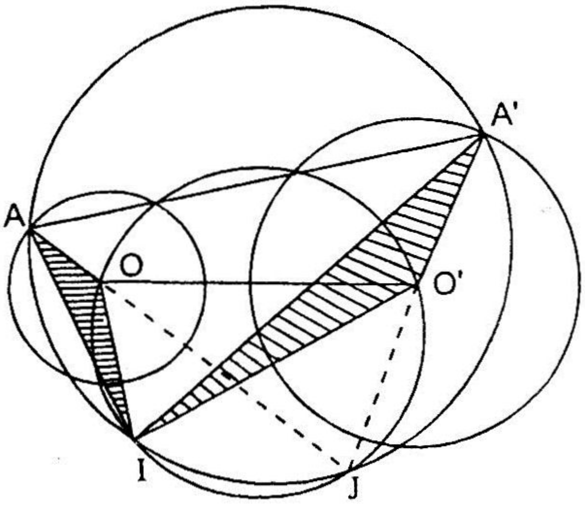
BÀI GIẢI

Gọi I là tâm đồng dạng biến đường tròn (O) thành đường tròn (O'), đồng thời biến điểm A thành điểm A' thì:

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{IO'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) = \alpha \text{ và } (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) = \alpha$$

Gọi $J = OA \cap O'A'$ ta có tứ giác JIOO' và JIAA' nội tiếp được. Vậy I là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (JAA') và (JOO').

Do đó phép đồng dạng tâm I biến (O) thành (O') và biến A thành A'. Ta được tam giác IOO' đồng dạng với tam giác IAA'.



Gọi R, R' lần lượt là bán kính của đường tròn tâm O và đường tròn tâm O', ta có tỉ số đồng dạng $k = \frac{R'}{R}$. Vậy phép đồng dạng cần tìm là phép đồng dạng tâm I, tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và góc quay $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'})$.

Ví dụ 24. Cho bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 cùng nằm trên một đường tròn (O). Gọi (T_i) là tam giác xác định bởi ba trong bốn điểm trên, trừ điểm A_i. Chứng minh rằng bốn đường tròn Euler của bốn tam giác (T_i) cùng đi qua một điểm.

BÀI GIẢI

Gọi G là điểm sao cho: $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4} = 0$ (1)

Theo chương I (phần tâm tỉ cự), thì điểm G như vậy là xác định và duy nhất. Gọi H là trực tâm của tam giác (T_i) có các đỉnh là A_j, A_k, A_l ở đây i = 1, 2, 3, 4 và $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Vẫn theo chương I, ta có: $\overrightarrow{OH_i} = \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OH_i} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l}$$

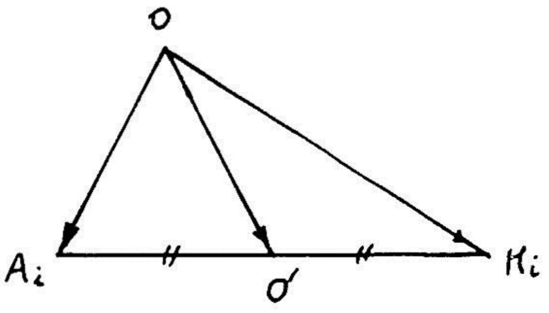
$$= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} \quad (2)$$

Vì G là tâm tỉ cự của hệ bốn điểm (A_1, A_2, A_3, A_4) với bộ số (1, 1, 1, 1), nên theo tính chất của tâm tỉ cự ta có:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} = 4\,\overrightarrow{OG} \qquad (3)$$

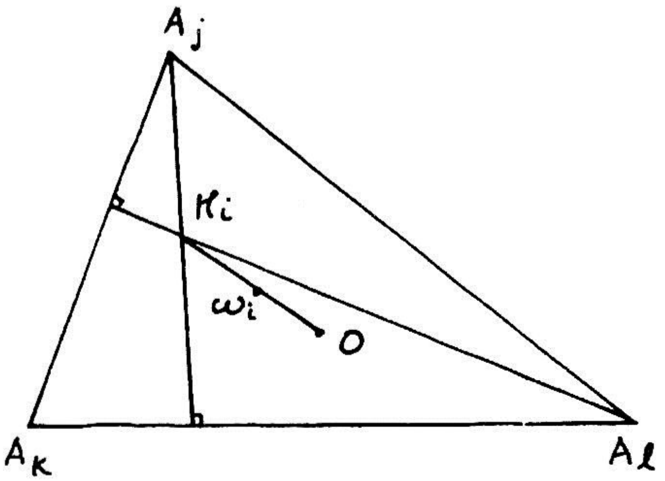
Giả sử: $O \xrightarrow{S(G)} O'$

Khi đó từ (2) và (3) có $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OH_i} = 2\overrightarrow{OO'}$ (4)



Đẳng thức (4) chứng tỏ rằng O' là trung điểm của A_iH_i. Do vai trò đối xứng của i, j, k, *l* suy ra bốn đoạn thẳng A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 đồng qui tại trung điểm chung O' của 4 đoạn, và ta có:

$H_iO' = \frac{1}{2}H_iA_i$ (5) i = 1, 2, 3, 4.



Do O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (T_i) nên theo bài 3 chương 7, thì tâm ω_i của đường tròn Euler của tam giác (T_i) chính là trung điểm của đoạn OH_i, tức là $\overrightarrow{H_i\omega_i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{H_iO}$ (6),

i = 1, 2, 3, 4.

Từ (5) và (6) suy ra phép vị tự H (H_i, $\frac{1}{2}$) biến đường tròn (O) thành đường tròn Euler (ω_i) của tam giác (T_i).

Do (O) đi qua A_i, nên (ω_i) đi qua O'.

Vậy bốn đường tròn Euler của bốn tam giác (T_i) cùng đi qua O' (là ảnh của O trong phép đối xứng tâm G) ⇒ đó chính là đ.p.c.m..

Ví dụ 25. Cho ngũ giác ABCDE. Trung điểm của mỗi cạnh được nối với các trung điểm của các cạnh không có đỉnh chung với cạnh ấy. Như vậy ta sẽ thu được một ngũ giác mới $A_1B_1C_1D_1E_1$, trong đó A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 là trung điểm của 5 đoạn thẳng được xác định như trên. Chứng minh rằng $A_1B_1C_1D_1E_1$ là ảnh của ngũ giác ABCDE qua một phép vị tự nào đó.

BÀI GIẢI

Giả sử M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh BC và DE. Gọi A_1 là trung điểm của MN. Với mọi điểm I, ta có (do A_1 là trung điểm của MN).

$$\overrightarrow{IA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN})$$

Lý do M là trung điểm của BC, nên: $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$

Tương tự có: $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE})$

Như thế có:

$$\overrightarrow{IA_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE}) \qquad (1)$$

Do (1) đúng ∀ điểm I, nên nói riêng nếu gọi O là tâm tỉ cự của 5 đỉnh A, B, C, D, E theo bộ số (1,1,1,1,1), tức là:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 0$, thì từ (1) thay I bằng O, ta có:

$$\overrightarrow{OA_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} \qquad (2)$$

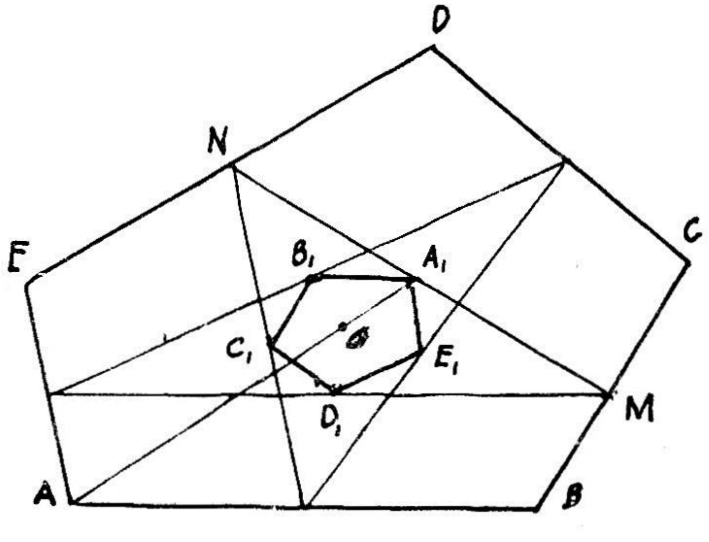
Do vai trò bình đẳng giữa các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, ta có:

$$\overrightarrow{OB_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OC_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OC};\ \overrightarrow{OD_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OD} \text{ và } \overrightarrow{OE_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OE}.$$

Như thế:

$$ABCDE \xrightarrow{H(0, -\frac{1}{4})} A_1B_1C_1D_1E_1.$$

Đó là đ.p.c.m..



MỤC LỤC

Chương 1: **Phương pháp toạ độ trên mặt phẳng.**

§1. Véc tơ và các phép toán về véc tơ 7
§2. Toạ độ của điểm và véc tơ 41
§3. Tích vô hướng của hai véc tơ 71

Chương 2: **Hệ thức lượng giác của các góc từ 0^o đến 180^o**

§1. Tóm tắt lý thuyết 106
§ 2. Các ví dụ mẫu 109

Chương 3: **Hệ thức lượng trong các hình**

§1. Tóm tắt lý thuyết 179
§ 2. Các ví dụ mẫu 183

Chương 4: **Phép quay**

§1. Tóm tắt lý thuyết 223
§ 2. Các ví dụ mẫu 224

Chương 5: **Phép tịnh tiến**

§1. Tóm tắt lý thuyết 260
§ 2. Các ví dụ mẫu 261

Chương 6: **Phép đối xứng**

§1. Tóm tắt lý thuyết 280
§ 2. Các ví dụ mẫu 281

Chương 7: **Phép vị tự**

§1. Tóm tắt lý thuyết 303
§ 2. Các ví dụ mẫu 304